Примеры заданий контрольной работы
(допуск к экзамену)

Для допуска к экзамену необходимо сдать задачу №1 (графики) на компьютере и
письменную контрольную работу на несданные в семестре темы по численным методам:

2. Интерполяция (Постановка задачи, полином Лагранжа для 2-6 узлов);
3. Аппроксимация (Постановка задачи, Сведение нелинейной функции к линейной, метод наименьших квадратов для линейной аппроксимации).
4. Численное интегрирование (постановка задачи, методы прямоугольников слева и справа, метод трапеций);
5. Нелинейные уравнения (постановка задачи, метод дихотомии);
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения (постановка задачи, метод Эйлера для ОДУ первого, второго порядка);

Примеры заданий контрольной работы и их решения

Тема **Интерполяция**

Пример задания:
Постановка задачи интерполяции. Для узлов (1,3),(3,4),(5,-2),(6,2) записать формулу интерполяционного полинома Лагранжа, проходящего через четыре узла. Доказать, что полином проходит через точку (3,4).
Решение:
Постановка задачи: Даны точки (узлы интерполяции (x_i,y_i), где номер узла i=0,1,..n , и точка интерполяции $x_{инт}$. Необходимо найти значение функции $y(x_{инт.})$ в этой точке.
Интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через 4 узла, имеет вид:

$$L_4(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

В данной задаче x_0=1, y_0=3 … x_3=6, y_3=2 . Следовательно, полином Лагранжа, проходящий через данные 4 узла:

$$y(x) = 3\frac{(x-3)(x-5)(x-6)}{(1-3)(1-5)(1-6)} + 4\frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(3-1)(3-5)(3-6)} - 2\frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(5-1)(5-3)(5-6)}$$

$$+ 2\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(6-1)(6-3)(6-5)}$$

В точке (3,4) $x_{инт}$=3 и

$$y(3)=3\frac{\overset{\mathbf{0}}{(3-3)}(3-5)(3-6)}{(1-3)(1-5)(1-6)}+4\frac{\cancel{(3-1)}\cancel{(3-5)}\cancel{(3-6)}}{\cancel{(3-1)}\cancel{(3-5)}\cancel{(3-6)}}-2\frac{(3-1)\overset{\mathbf{0}}{(3-3)}(3-6)}{(5-1)(5-3)(5-6)}$$

$$+2\frac{(3-1)\overset{\mathbf{0}}{(3-3)}(3-5)}{(6-1)(6-3)(6-5)}=4$$

Следовательно, полином проходит через точку (3,4).

Тема **Аппроксимация**

Пример задания:
Постановка задачи аппроксимации. Даны точки (1,3), (3,6), (4,4). Найти коэффициенты линейной аппроксимации
Решение:
Данные точки обозначим (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), аппроксимирующую прямую $F(x)=a_0+a_1x$. Нужно найти коэффициенты прямой a_0,a_1 такие что сумма квадратов отклонений $R=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_0+a_1x_i))^2$ была минимальной .

Сумма квадратов отклонений будет минимальна, если

$$\frac{\partial R}{\partial a_0}=\frac{\partial R}{\partial a_1}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_0}=-2\sum(y_i-(a_1x_i+a_0))=-2\sum(y_i-a_1x_i-a_0)=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1}=-2\sum(y_i-(a_1x_i+a_0))x_i=-2\sum(y_ix_i-a_1x_i^2-a_0x_i)=0$$

$$\sum y_ix_i-a_1\sum x_i^2-a_0\sum x_i=0$$

$$\sum y_i-a_1\sum x_i-a_0n=0$$

Обозначим

$$M_x=\sum x_i,M_y=\sum y_i,M_{xy}=\sum x_iy_i,M_{xx}=\sum x_i^2$$

Везде суммирование ведется по всем точкам i=1..n. Тогда для определения a_0 и a_1 получается система уравнений :

$$a_1M_{xx}+a_0M_x=M_{xy}$$

$$a_1M_x+a_0n=M_y$$

Выражения для параметров имеют вид (приводим вывод)

$$a_1 = \frac{M_{xy} n - M_x M_y}{M_{xx} n - M_x M_x}, a_0 = \frac{M_{xx} M_y - M_x M_{xy}}{M_{xx} n - M_x M_x}$$

Найдем значения параметров для данных точек.

M_x=1+3+4=8; M_{xx}=1^2+3^3+4^2=26; M_y=3+6+4=13; M_{xy}=1*3+3*6+4*4=37; n=3

$$a_1 = \frac{37 \cdot 3 - 8 \cdot 13}{26 \cdot 3 - 8 \cdot 8} = 0.5 \qquad a_0 = \frac{26 \cdot 13 - 8 \cdot 37}{26 \cdot 3 - 8 \cdot 8} = 3$$

Тема **Численное интегрирование**

Пример задания:
Записать формулу метода прямоугольников
справа для интеграла

$$\int_{-1}^{2} x^a \left(a^3 - x^3\right) dx$$

Решение:
В данном интеграле пределы интегрирования a=-1, b=2. Возьмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{100} = 0.03$ и $x_i = a + i \cdot h = -1 + 0.03i$

Подынтегральная функция

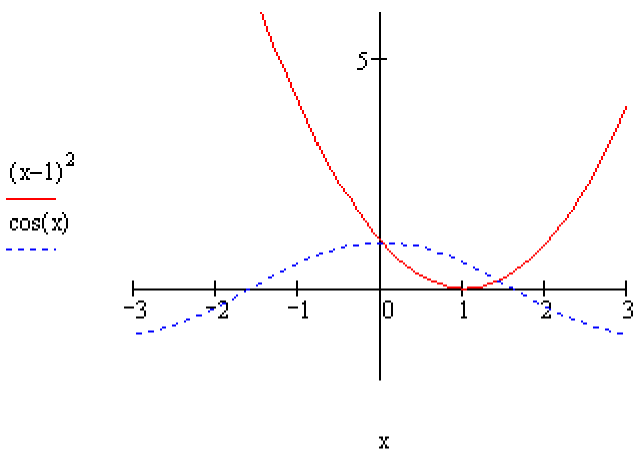
$$y_i = f(x_i) = x_i^a (a^3 - x_i^3) = (-1 + 0.03i)^a (a^3 - (-1 + 0.03i)^3)$$

$$\int_{-1}^{2} x^a (a^3 - x^3) dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_i = 0.03 \sum_{i=1}^{100} (-1 + 0.03i)^a (a^3 - (-1 + 0.03i)^3)$$

(другие примеры см. в файле «Примеры численных схем» -на странице Павловой Т.Ю.)

Тема **Нелинейные уравнения**

Пример задания:
 Записать определение корня нелинейного уравнения. Отделить хотя бы один корень данного уравнения. Написать алгоритм нахождения корня при решении данного уравнения методом дихотомии. $(x-1)^2 = \cos(x)$



Решение:
Корнями (решениями) нелинейного уравнения является набор значений независимой переменной x, при подстановке которых в уравнение, оно превращается в тождество.
Для нахождения значения корня методом дихотомии, его нужно

отделить, то есть найти отрезок, на котором находится один корень. Для этого можно изобразить график функции $(x\text{-}1)^2\text{-}\cos(x)=0$ и искать отрезки, на которых эта функция пересекает ось x, или построить графики правой и левой частей уравнения и искать отрезки, на которых эти функции пересекаются. Для простых функций (как в этом примере, а также функций x^3, sin(x), $\sqrt{x}, \dfrac{1}{x-a}$ -вид графика которых нужно знать) последнее удобней. Если построить графики функций $(x\text{-}1)^2$ и cos(x) (на рисунке), то видно, что уравнение имеет 2 корня на отрезках [-1,1] и [1,2]. Для описания алгоритма выбираем любой, например, [1,2].

Алгоритм нахождения корня при решении уравнения методом дихотомии:

1) Приводим уравнение к виду $F(x)= (x\text{-}1)^2\text{-}\cos(x)=0$. Ищем корень на отрезке [1,2]. При этом a=1, b=2. Проверяем, что функция F(x) на этом отрезке меняет знак (считать не надо!): $((1\text{-}1)^2\text{-}\cos(1)) \cdot ((2\text{-}1)^2\text{-}\cos(2)) <0$.

Задана точность ε.

2) За новое приближение корня берется точка c. $c=\dfrac{a+b}{2}$,

вычисляется $(c\text{-}1)^2\text{-}\cos(c)$.

3) Проверяют, удовлетворяет ли приближение заданной точности.

$|(c\text{-}1)^2\text{-}\cos(c)|< \varepsilon$ или $|b-a|< \varepsilon$

Если да, то заканчивают счет и считают, что корень уравнения равен c

(с точностью ε).

Если условие из п.3 неверно, то проверяют, в какой части отрезка [a,b] находится корень. Считается, что корень находится на том отрезке, где функция меняет знак. То есть, если $((c\text{-}1)^2\text{-}\cos(c))\cdot((b\text{-}1)^2\text{-}\cos(b))<0$, то корень лежит на отрезке $[b,c]$, то есть $a=c$.

Если это условие не выполняется, то корень лежит на отрезке $[a,c]$, то есть $b=c$.

4) Далее переходим к п.2

Тема **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Пример задания:

Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ, значения независимой переменной и функции в двух точках (с номерами 0 и 1).

ОДУ: 1 порядка - z'=-(z+y)y или 2-го порядка xy”=y’- cos(y)

Решение:

Уравнение 1-го порядка:

Решением данного ОДУ является функция z(y) (определяем название функции по производной). Задача Коши, например, z(1)=4.

По теории для уравнения x’=f(t,x) схема Эйлера записывается в виде

$t_{i+1}=t_i+h$, i=0,1, 2, 3,…

$x_{i+1}=x_i+h\times f(x_i, t_i)$

Схема Эйлера для данного уравнения

$y_{i+1} = y_i + h$

$z_{i+1} = z_i - h\cdot(z_i + y_i)\cdot y_i$

В соответствии с дополнительными условиями:

$y_0 = 1 \quad z_0 = 4$

Выберем h=0.1

$y_1 = y_0 + h = 1.1$

$z_1 = z_0 - h\cdot(z_0 + y_0)\cdot y_0 = 4 - 0{,}1(4+1)\cdot 1 = 3.5$

Уравнение 2-го порядка:

Решением является функция y(x).

Задача Коши: y(0)=1; y'(0)=2;

xy''=y'- cos(y) преобразуем к виду y''=(y'-cos(y))/x.

Делаем замену y'=z, получаем систему

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = (z - \cos(y))/x \end{cases}$$

Схема Эйлера

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h\cdot z_i \\ z_{i+1} = z_i + h\cdot(z_i - \cos(y_i))/x_i \end{cases}$$

В соответствии с дополнительными условиями:

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 2$

Выберем h=0.1

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0.1 \\ y_1 = y_0 + h\cdot z_0 = 1 + 0.1\cdot 2 = 1.2 \\ \end{cases}$$