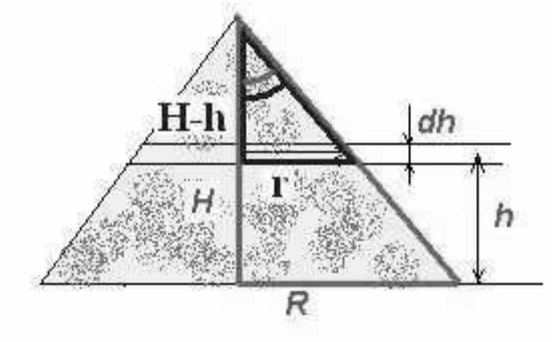
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

§1.Физические задачи, приводящие к интегрированию.

Интегрирование функций является составной частью многих научных и технических задач. Поскольку аналитическое интегрирование не всегда возможно, используют различные методы численного интегрирования.

Рассмотрим задачи, приводящие к интегрированию. В физике – это задачи нахождения пути, работы, силы и др.

Задача 1. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка ρ.



Рассмотрим физическую модель решения этой задачи. В данном случае работа затрачивается при поднятии песка на некоторую высоту. Работу можно вычислить по формуле A=mgh, где m –масса песка, g – ускорение свободного падения, h – высота, на которую поднимают песок. Однако, трудность заключается в том, что разные части песка нужно поднимать на разную высоту. Разобьем наш конус на тонкие горизонтальные пласты толщиной dh. Рассмотрим один из таких пластов. Можно считать, что всю массу песка dm такого пласта подняли на одну и ту же высоту h.

При этом $dm= \rho \cdot dV= \rho \cdot S \cdot dh= \rho \cdot \pi r^2\, dh$ и работа по поднятию этого тонкого пласта $dA=gh\, dm =\rho \cdot gh \cdot \pi r^2\, dh$. Из рисунка видно, что выделенные треугольники подобны, имеют общий угол, причем

$$tg(\alpha) = \frac{R}{H} = \frac{r}{H - r}$$

Откуда $r =R\cdot(H-h)/H$. Величина h изменяется для разных пластов от 0 до H. Для того, чтобы найти полную работу, нужно просуммировать dA для всех тонких пластов. В идеале $dh \to 0$, а суммирование превращается в интегрирование.

$$A = \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H-h)^2 h dh$$

§2.Методы интегрирования

Математическая постановка задачи: необходимо найти значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

где a, b - конечны, f(x) - непрерывна на [a, b].

При решении практических задач часто бывает, что интеграл неудобно или невозможно взять аналитически: он может не выражаться в элементарных функциях, подынтегральная функция может быть задана в виде таблицы и пр. В таких случаях применяют методы численного интегрирования.

Известно, что определенный интеграл численно равен значению площади фигуры, ограниченной подынтегральной функцией, осью x, прямыми x=a и x=b (см. рисунок ниже). Общий подход к вычислению интеграла численными методами, сводится к нахождению этой площади. Чаще всего интервал [a, b] разбивают множество меньших интервалов. Находят приблизительно площади каждой полоски и сумму площадей. Формулы численного интегрирования носят название **квадратурных формул**.

Можно выделить три группы методов:

1.Методы с разбиением отрезка интегрирования на равные интервалы.

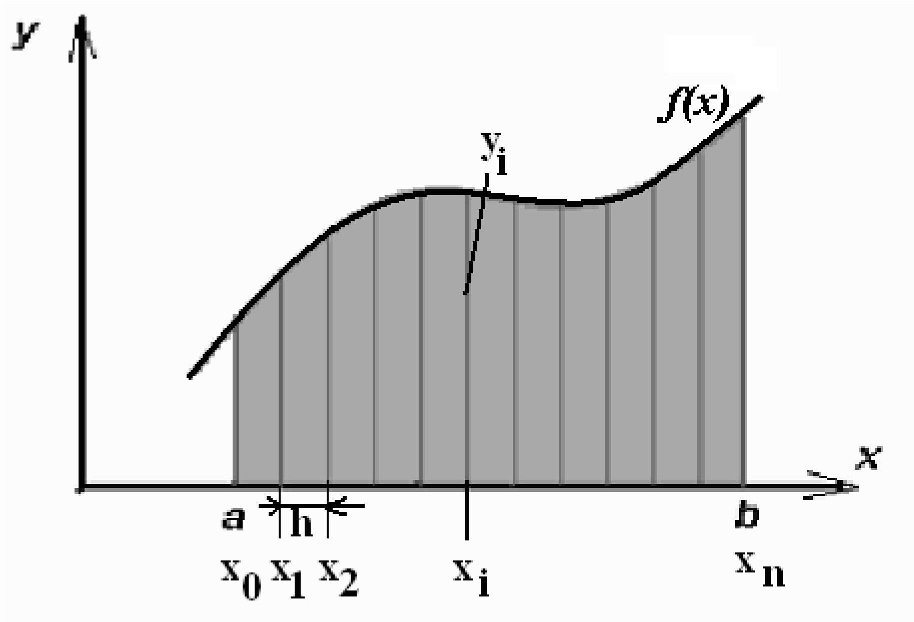
Разбиение на интервалы производится заранее, обычно интервалы выбирают равными (чтобы легче было вычислять функцию на концах интервалов). Вычисляют площади и суммируют их (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

2.Методы с разбиением отрезка интегрирования с помощью специальных точек. (Формулы типа формул Гаусса.)

3.Вычисление интегралов с помощью случайных чисел (метод - Монте – Карло).

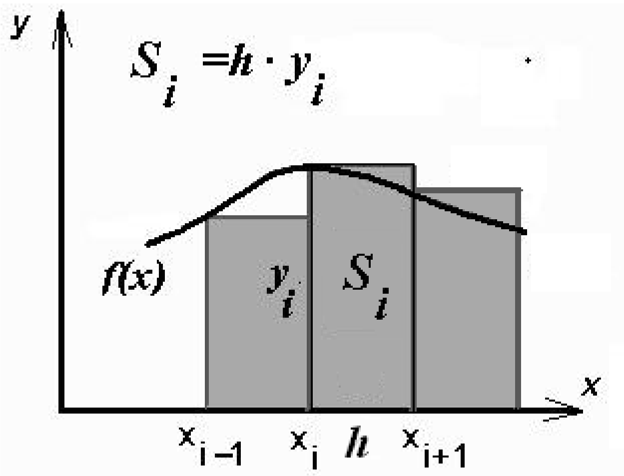
§3.Методы прямоугольников.

Для методов первой группы отрезок интегрирования [a, b] разобьем на n равных частей, таким образом определим (n+1) точку $x_0, x_1, \dots, x_n$. Число разбиений n выбирают.



$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_0 = a;$$
$$x_i = a + i * h$$
$$x_n = b$$

Здесь i –номер точки, h -шаг интегрирования, соответствующие значения функции будем обозначать $y_i = f(x_i)$.



В методе прямоугольников криволинейную трапецию, ограниченную функцией f(x) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменяют на прямоугольник. В **методе прямоугольников слева** высота прямоугольника выбирается равной $y_i=f(x_i)$ – значение функции в крайней левой точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (см.рис.). Площадь этого прямоугольника $S_i=h \cdot y_i$. Тогда интеграл приближенно может быть найден с помощью суммы

$$I \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (*)$$

Суммирование ведется с учетом того, что в первом прямоугольнике слева в качестве высоты выступает y_0, а в последнем прямоугольнике справа (внутри отрезка интегрирования [a, b]), в качестве высоты выступает y_{n-1}.

В **методе прямоугольников справа** на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ строится прямоугольник с высотой y_{i+1} (см. рис). Интеграл приближенно находится с помощью суммы

$$I = h\sum_{i=1}^{n} y_i \ ,$$

которая отличается от формулы для метода прямоугольников слева только пределами суммирования.

В **методе средних** в качестве высоты прямоугольника выбирается значение функции в точке, посередине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, то есть

$$y_{i+1/2} = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \text{ и } I = h\sum_{i=0}^{n} y_{i+1/2}$$

Название метода прямоугольников, таким образом, зависит от того, в какой точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, выбирается высота этого прямоугольника.

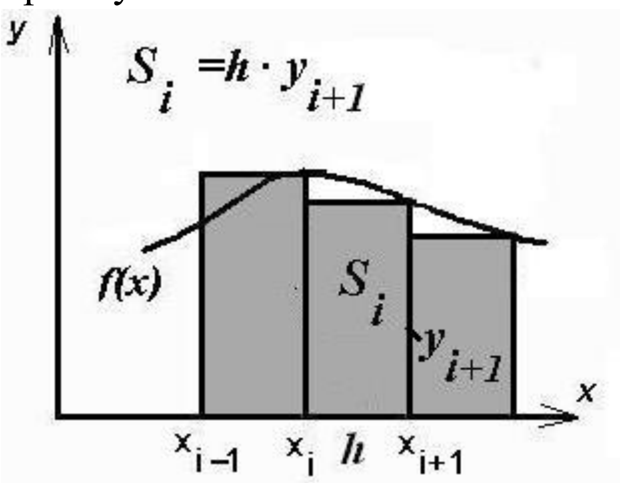


Рис. Замена криволинейной трапеции прямоугольником в методе прямоугольников справа.

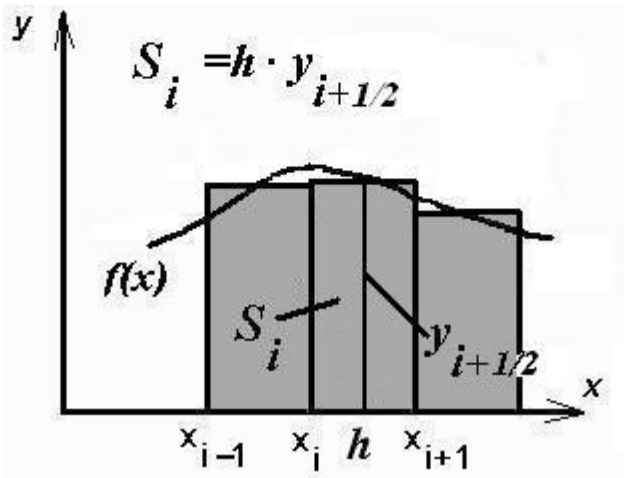


Рис. Замена криволинейной трапеции прямоугольником в методе средних.

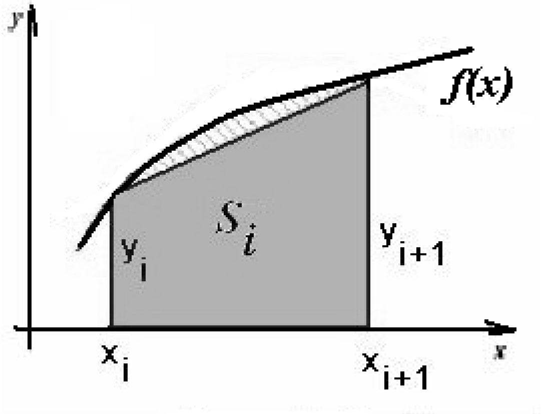
Бывает, что подынтегральная функция задана в виде таблицы. Тогда расчет ведется с переменным шагом интегрирования. Считают, что шаг метода переменный и вычисляется по формулам $h_i=x_{i+1}-x_i$ –слева и $h_i=x_i-x_{i-1}$- справа.

§4.Метод трапеций.

В методе трапеций криволинейная трапеция на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется на прямолинейную, основаниями которой являются отрезки y_{i+1} и y_i. Площадь трапеции

$$S_i = h\frac{y_{i+1}+y_i}{2}$$

$$I = \sum_{i=0}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n} h\frac{y_{i+1}+y_i}{2} = h\frac{y_0+y_n}{2} + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$



§5.Формула Симпсона.

Площадь малой криволинейной трапеции S_i в методах, описанных выше, приближается площадью фигуры, ограниченной сверху прямой, т.е. полиномом первой степени. Понятно, что эту фигуру можно ограничить и полиномом более высокой степени. Наиболее известен метод, в котором используется так называемый полином Ньютона второй степени

$$y = y(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})y(x_{i-1}, x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i)y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

где $y(x_{i-1}, x_i)$ и $y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ –так называемые разделенные разности, числа, являющиеся комбинацией $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$, $y(x_{i+1})$.

Полином Ньютона строится на смежных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, через три точки (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) и является параболой. Чтобы найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой, можно аналитически взять интеграл:

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})y(x_{i-1}, x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i)y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \right) dx =$$

$$= h\frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{3}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{\substack{i \\ шаг\,2}} S_i = \sum_{\substack{i=1 \\ шаг\,2}}^{n-1} h\frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{3}$$

- формула для нахождения определенного интеграла методом Симпсона.

§6.Метод Гаусса

Расчет интеграла в данном методе осуществляется в два этапа:

А) интеграл с пределами интегрирования [a,b] сводится к интегралу с пределами [-1,1]. $\int_a^b f(x)dx \to \int_{-1}^{1} Y(\mu)d\mu$

Б) полученный интеграл рассчитывается как сумма значений подынтегральной функции в специальных точках, умноженных на весовые коэффициенты.

$$\int_{-1}^{1} Y(\mu)d\mu = \sum_i A_i Y(\mu_i)$$

Для изменения пределов интегрирования делается замена переменных

$$\mu = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)}$$

при этом если переменная x € [a,b], то переменная μ € [-1,1].

$$X = \frac{1}{2}(b-a)\mu + \frac{1}{2}(b+a)$$

тогда

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)d\mu$$

$$f(x)dx = f(\frac{1}{2}(b-a)\mu + \frac{1}{2}(b+a))\frac{1}{2}(b-a)d\mu = Y(\mu)d\mu$$

Таким образом, этой заменой переменной интеграл с любым ограниченным отрезком интегрирования можно свести к виду $I = \int_{-1}^{1} Y(\mu)d\mu$

Например, $I = \int_0^2 x^2 dx$, $\mu = \frac{2x-2}{2} = x-1$, x=μ+1

$$Y(\mu)=\frac{1}{2}(2-0)(\frac{1}{2}\cdot(2-0)\mu+\frac{1}{2}(2+0))^2=(\mu+1)^2$$ и

$$\int_0^2 x^2dx=\int_{-1}^1(\mu+1)^2d\mu$$

Если в качестве Y(μ) брать степенную функцию, то можно подобрать такие веса A_i такие, что выполняется точное равенство

$$\int_{-1}^1 Y(\mu)d\mu=\sum_{i=1}^n A_iY(\mu_i)$$, где μ_i- корни полиномов Лежандра (специальные функции) степени n, A_i - коэффициенты. Для других функций эта формула будет приближенной. A_i и μ_i для разных n уже вычислены и сведены в таблицу.

n	μ_i	A_i
1	0	2
2	± 0.57735027	1
3	± 0.77459667 0	0.5555556 0.88888889
4	± 0.86113631 ± 0.33998104	0.34785484 0.65214516

Заметьте, что μ_i симметричны относительно начала координат, а коэффициенты A_i - одинаковы для $\pm\mu_i$

Рассмотренный выше в качестве примера интеграл может быть приближенно рассчитан по формуле Гаусса по трем точкам так:

$$\int_0^2 x^2dx=\int_{-1}^1(\mu+1)^2d\mu\approx\sum_{i=1}^3 A_i(\mu_i+1)^2=$$

$=0.5555556\cdot(-0.77459667+1)^2+0.5555556\cdot(0.77459667+1)^2+$
$+0.88888889\cdot(0+1)^2=2.6666668$

Точное значение интеграла

$$\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{2^3}{3}=2.6666667$$