Численное интегрирование

1. Записать формулу метода прямоугольников справа для интеграла

$$\int_{-1}^{2} x^a\left(a^3 - x^3\right)dx$$

Решение:
В данном интеграле пределы интегрирования a=-1, b=2. Возьмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{100} = 0.03$ и $x_i = a + i \cdot h = -1 + 0.03i$

Подынтегральная функция

$$y_i = f(x_i) = x_i^a (a^3 - x_i^3) = (-1 + 0.03i)^a (a^3 - (-1 + 0.03i)^3)$$

$$\int_{-1}^{2} x^a (a^3 - x^3) dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_i = 0.03 \sum_{i=1}^{100} (-1 + 0.03i)^a (a^3 - (-1 + 0.03i)^3)$$

2. Записать формулу метода трапеций для интеграла

$$\int_{0.5}^{0.7} (x + a)\left(a - x\right)dx$$

Решение:
В данном интеграле пределы интегрирования a=0.5, b=0.7. Возмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.7 - 0.5}{100} = 0.002$ и $x_i = a + i \cdot h = 0.5 + 0.002i$

Подынтегральная функция

$$y_i = f(x_i) = (x_i + a)(x_i - a) = (0.5 + 0.002i + a)(0.5 + 0.002i - a)$$

$$\int_{0.5}^{0.7} (x + a)(x - a) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) =$$

$$= 0.001 \sum_{i=0}^{99} \left[(0.5 + 0.002i + a)(0.5 + 0.002i - a) + (0.5 + 0.002(i+1) + a)(0.5 + 0.002(i+1) - a)\right]$$

3. Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом прямоугольников слева

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx$$

Решение:

Сначала необходимо определить переменную интегрирования (по дифференциалу), пределы интегрирования по ней и рассчитать шаг. В данном случае, переменная x изменяется от 1 до 10. Шаг h=(10-1)/n=9/n (n-число разбиений, например, n=100).

В квадратурных формулах численного интегрирования переменная интегрирования меняется дискретно $x_i = a + i \cdot h$. В данном случае $x_i = 1 + 9i / n$.

Значение x_i используется для вычисления значения функции:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i}\cos(c \cdot x_i) = \frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n))$$

В методе прямоугольников слева искомый интеграл рассчитывается по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Окончательно записываем численную схему для вычисления данного интеграла методом прямоугольников слева:

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n))$$

4. Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом прямоугольников справа

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx$$

Решение:

Переменная интегрирования x изменяется от 1 до 10.

Шаг h=(10-1)/n=9/n (n-число разбиений, например, n=100).

Переменная интегрирования меняется дискретно $x_i = a + i \cdot h$. В данном случае $x_i = 1 + 9i / n$.

Значение x_i используется для вычисления значения функции:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i}\cos(c \cdot x_i) = \frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n))$$

В методе прямоугольников справа искомый интеграл рассчитывается по формуле

$$I = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Окончательно записываем численную схему для вычисления данного интеграла методом прямоугольников справа:

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+9i/n}\cos(c\cdot(1+9i/n))$$

5. Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом трапеций

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx$$

Решение:

Переменная интегрирования x изменяется от 1 до 10.

Шаг h=(10-1)/n=9/n (n-число разбиений, например, n=100).

Переменная интегрирования меняется дискретно $x_i = a + i\cdot h$. В данном случае $x_i = 1 + 9i/n$.

Значение x_i используется для вычисления значения функции:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i}\cos(c\cdot x_i) = \frac{1}{1+9i/n}\cos(c\cdot(1+9i/n))$$

В методе трапеций необходимо еще найти

$$y_{i+1} = \frac{1}{x_{i+1}}\cos(c\cdot x_{i+1}) = \frac{1}{1+9(i+1)/n}\cos(c\cdot(1+9(i+1)/n))$$

и подставить его в формулу для метода трапеций

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\frac{y_{i+1}+y_i}{2} = \frac{9}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1+9i/n}\cos(c\cdot(1+9i/n)) + \frac{1}{1+9(i+1)/n}\cos(c\cdot(1+9(i+1)/n))\right]$$

6. Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом трапеций

$$\int_{-b}^{2b} e^{2x+1}dx$$

Решение:

Переменная интегрирования x изменяется от -b до 2b.

Шаг h=(2b-(-b))/n=3b/n (n-число разбиений, например, n=100).

Переменная интегрирования меняется дискретно $x_i = a + i\cdot h$. В данном случае $x_i = -b + 3bi/n$

Значение x_i используется для вычисления значений функции:

$$y_i = y(x_i) = e^{2x_i+1} = e^{2(-b+3bi/n)+1}$$

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = e^{2x_{i+1}+1} = e^{2(-b+3b(i+1)/n)+1}$$

Окончательно записываем численную схему для вычисления данного интеграла методом трапеций:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = \frac{3b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[e^{2(-b+3b(i+1)/n)+1} + e^{2(-b+3bi/n)+1} \right]$$