11. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

11.1. Тело движется прямолинейно с ускорением a м/с^2 и начальной скоростью v м/с. Найти путь, который оно пройдёт за время t. Решить задачу с помощью численного интегрирования и сравнить с известной формулой.

11.2. Скорость движения точки v=0.1exp(-0.02t) (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

11.3. Скорость тела даётся формулой: $v=\sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 сек после начала движения.

11.4. При гармоническом колебательном движении по оси абсцисс около начала координат скорость dx/dt даётся формулой:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right).$$

Найти положение точки в момент времени t2, если известно, что в момент t1=0 её скорость была равна нулю.

11.5. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка ρ.

Указание: При поднятии элемента объёма dV=S·dh=πr^{2}dh на высоту h совершается работа dA=mgh=ρ·dV·h. Выразить dV через h и H.

11.6. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H, сторона основания a, плотность материала ρ. См. указание к задаче 11.5.

11.7. Подъёмный кран поднимает из воды камень конической формы. Какую работу затратит подъёмный кран на полное извлечение камня из воды, если вершина конуса находилась на поверхности воды? Радиус основания конуса R=1м, высота H=3м, плотность ρ=2.5 г/см3.

Указание: На камень действует сила тяжести $F_т$ и сила Архимеда F_a. Если вершина конуса находится на высоте h над поверхностью воды, то $F_т$=ρgV_1, F_a=ρgV_2, где V_1- полный объём конуса, V_2- объём части конуса, находящейся под водой. Работа по поднятию конуса на высоту dh: dA=($F_т$-F_a)dh.

11.8. Чугунный конус высотой H=40 см и радиусом основания R=40 см находится на дне бассейна, наполненного до краёв нефтяным маслом. Найти работу, которую надо совершить при извлечении этого конуса из бассейна, если плотность чугуна ρ1=7.22 г/см^3, плотность нефтяного масла ρ2=0.89 г/см^3 , а высота бассейна A=1 м.

См. указание к задаче 11.7. При этом нужно учесть работу по поднятию конуса со дна бассейна до высоты, на которой его вершина будет находиться на поверхности воды.

11.9. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности ρ из резервуара, имеющего форму конуса, обращённого вершиной вверх. Радиус основания конуса R, высота H. Как изменится результат, если конус будет обращён вершиной вниз?

Указание: Рассмотреть слой воды, находящийся на глубине h от поверхности, имеющий площадь $S=\pi r^2$ и высоту dh. Элементарная работа по поднятию этого слоя на высоту h: $dA=ghdV=gh\pi r^2dh$. Выразить r через h.

11.10. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности ρ из полусферического резервуара радиуса R=0.6 м. См. указание к задаче 11.9.

11.11. Электрический заряд e_0, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки (a,0) в точку (b,0). Определить работу A силы отталкивания F.

11.12. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется по закону: $\varepsilon=\varepsilon 1\cdot\cos(\pi x/4d)$, $\varepsilon 1=2.5$, x- расстояние до первой пластины, d=5см – расстояние между пластинами. Найти ёмкость конденсатора, если разность потенциалов на нём

$$U=\int_0^d Edx=\int_0^d \frac{Q}{S\varepsilon}dx,$$

где Q- заряд конденсатора, S – площадь пластин.

11.13. С какой силой полукольцо радиуса R и массы M притягивает материальную точку m, находящуюся в его центре?

Указание: рассмотреть составляющие силы по осям x, y, действующие на элемент полукольца массы $dM=\frac{M}{\pi R}dR$.

11.14. С какой силой притягивает отрезок длиной L=100 м с постоянной линейной плотностью μ материальную точку массы m, находящуюся над серединой отрезка на расстоянии a?

См. указание к задаче 11.13.

11.15. Определить массу стержня длины L=10 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\mu=6x+0.3x^2$ кг/м, где x- расстояние от одного из концов стержня.

11.16. Какую работу нужно совершить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется на бесконечность? Учесть, что g=g(h).

11.17. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды.

Указание: Давление и сила давления воды зависят от высоты столба жидкости F=F(y). Силу давления на малый элемент площади $dS=r\cdot dy$ (r-ширина элемента площади, dy-высота этого элемента), находящийся на глубине y от поверхности можно приближенно рассчитать по формуле: $dF=\rho gy\cdot dS$. Выразить r через y.

11.18. Водопроводная труба имеет диаметр d=6см, один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на a=100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.
См. указание к задаче 11.17.

11.19. Найти силу давления бензина на стены цилиндрического бака высотой h=3.5 м и радиусом r=1.5м, если плотность бензина ρ=900 кг/м^3.
См. указание к задаче 11.17.

11.20. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющей форму трапеции, нижнее основание которой a=10 м, верхнее b=6 м, высота h=5 м, а уровень погружения нижнего основания c=20м.
См. указание к задаче 11.17.

11.21. Пластинка в виде треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h. Найти силу давления воды на каждую из сторон.
См. указание к задаче 11.17.

11.22. За какое время опорожнится наполненная доверху цилиндрическая бочка диаметром D=1м и высотой H=2м, поставленная вертикально, через круглое отверстие диаметром d=1 см в дне бочки?
Указание: Согласно закону Торичелли, скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g- ускорение силы тяжести, h –высота уровня жидкости над отверстием, а c=0.6 –опытный коэффициент. Изменение объема жидкости в единицу времени

$$\frac{dV}{dt} = -v \cdot S_{отв},$$

где $S_{отв}$ –площадь отверстия. Выразите dV через dh.

11.23. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

11.24. В дне котла, имеющего форму полушара радиуса R=43 см, образовалась пробоина площадью S=0.2 см^2. Через какое время, вода, наполняющая котел, вытечет из него?
См. указание к задаче 11.22.

11.25. Капля начальной массы M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли (сопротивлением воздуха пренебречь)?

11.26. В цилиндрическом сосуде объемом V=0.1 м^3 находится атмосферный воздух, который подвергается сжатию за счет движения поршня (процесс адиабатический $P \cdot V^{\gamma}$=const). Какую работу надо затратить, чтобы сжать воздух в сосуде до объема V=0.003 м^3? Атмосферное давление P0=10.33 Н/см^2 . Для двухатомных газов и воздуха γ=1.4.

11.27. Из распределения Максвелла найти количество молекул, скорости которых при T=300K лежат в интервале от V1 до V2.

11.28. Зависимость теплоемкости C_p некоторого вещества от температуры задана формулой:

$$C_P = 3R\frac{\lg(T+1)}{1+\lg(T+1)}.$$

Рассчитайте для T_2 =100К, 200К, 300К энтальпию:

$$H = \int_0^{T_2} C_P(T)dT$$

11.29. Зависимость теплоемкости C_p некоторого вещества от температуры задана формулой:

$$C_P = 3R\frac{1-\exp\left[-T^2/10000\right]}{1+100/T}$$

Рассчитать изменение энтальпии

$$H = \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)dT$$

соответствующее изменению температуры от T_1=78К до T_2=532К.

11.30. Ионизированная плазма с плотностью заряда $\rho=10^4\exp(-r^2)$ кл/м распределена в пространстве. Определить полный заряд плазмы, учитывая, что элемент объема сферы $dV=4\pi r^2 dr$, $dQ=\rho\cdot dV$.

11.31. В квантовой механике каждая частица характеризуется волновой функцией, причем квадрат волновой функции электрона имеет смысл вероятности нахождения этого электрона в какой-либо точке пространства, то есть, имеет место равенство:

$$4\pi\int_0^\infty \psi^2(r)dr = 1$$

Показать это для волновой функции

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r\cdot\exp(-11.7r)$$

11.32. С точностью ε вычислить число π:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

11.33. *В теории теплоемкости металлов Дебая C_V зависит от температуры T и от характеристической температуры Дебая θ:

$$C_V = \frac{9R}{\left(\theta/T\right)^3}\int_0^{\theta/T} x^4\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}dx$$

Построить график зависимости $C_V(T)$ для никеля (θ=3375К).

11.34. *Построить график зависимости светимости электрической лампочки от температуры. Светимость

$$F = \frac{64.77}{T^4}\int_{\lambda 1}^{\lambda 2}\frac{x^{-5}dx}{\exp\left(1.432/xT\right)-1}$$

λ_1=4·10-6, λ_2=7·10-5.

11.35. *Закон Планка описывает мощность излучения абсолютно черного тела как функцию температуры T и длины волны λ. Мощность излучения в диапазоне длин волн от λ до λ+dλ, испускаемого с единичной площади

$$dP_\lambda = \frac{2h \cdot c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(hc/\lambda kT\right) - 1}$$

Если проинтегрировать это выражение по λ от 0 до ∞, получается закон Стефана-Больцмана $P=\sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4$, где $\sigma=5{,}67032 \cdot 10^{-8}$ –постоянная Стефана-Больцмана, ε=1 – излучательная способность абсолютно черного тела. Проверьте это утверждение.