Оптимизация. Линейное программирование.

Постановка задачи

В экономике очень часто необходимо принять решение, причем вариантов решения стоящей задачи – множество, но необходимо выбрать оптимальное (наилучшее). В этих случаях часто используются методы линейного программирования (ЛП). Присутствие в названии термина «программирование» объясняется тем, что в английском языке слово «**programming**» означает **планирование**.

Задача в общем виде состоит в том, чтобы найти набор неотрицательных параметров x_j, которые дают максимум (минимум) линейной целевой функции (линейной формы)

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad (2) \qquad \text{для } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

причем переменные неотрицательны:

$x_j > 0$ (3)

Такую задачу называют «основной» или «стандартной» в линейном программировании.

Большинство реальных задач ЛП имеют единственное оптимальное решение для данной системы ограничений (2). Если система ограничений несовместна (неравенства или уравнения противоречат друг другу), задача вообще не имеет решения. В некоторых задачах может быть множество допустимых решений, считается, что такие задачи также не имеют оптимального решения.

Неотрицательность переменных (3) отражает их реальный экономический смысл.

Примеры задач ЛП

Задача оптимального использования ресурсов (оптимального планирования)

Предприятие выпускает продукцию n наименований. Для ее производства необходимо m видов ресурсов. Известны расходы ресурсов для каждого вида продукции a_{ij} (i=1..n, j=1..m) и запасы каждого вида ресурсов b_{ij} (j=1..m). Нужно составить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли.

Пример 1. Например, кондитерская фабрика выпускает три вида конфет: «Звёздные», «Ну-ка, отними», «Зайчик» по цене 190, 160 и 150 рублей за кг соответственно. Для производства этих конфет используется три вида сырья. Расход и запасы сырья отражены в таблице. Найти, какое количество конфет каждого вида нужно произвести, чтобы получить максимальную прибыль.

	Нормы расхода			
Наименование	Звездные	Ну-ка, отними	Зайчик	Запас сырья
Какао	18	15	12	360
Сахар	6	4	8	192
Наполнитель	5	3	3	180

Обозначим x_i (i=1..3) - количество произведенных конфет каждого вида. Прибыль можно подсчитать по формуле (целевая функция) $Z=190x_1+160x_2+150x_3$.

Система ограничений:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

Необходимо найти оптимальную совокупность x_1, x_2, x_3, при которых Z – максимальна.

Задача о смесях.

Необходимо составить смесь из n разных видов сырья, каждый из которых содержит в себе m видов веществ. Известно a_{ij} (i=1..n, j=1..m) –количество j вещества в единице i-того вида сырья и стоимость смеси каждого вида p_i. Найти, какое количество смеси каждого вида нужно произвести, чтобы получить максимальную прибыль.

Пример 2. Задача о смеси.

Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката; b_1 тыс. л алкилата; b_2 тыс. л крекинг-бензина; b_3 тыс. л бензина прямой перегонки и b_4 тыс. л изопентана.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях получают 3 сорта бензина: бензин А — 2:3:5:2, бензин В — 3:1:2:1 и бензин С — 3:2:1:3. Стоимости одной тысячи литров указанных сортов бензина равны c_1, c_2, c_3 единиц соответственно. Определить план смешивания компонентов из условия получения максимальной прибыли.

Обозначим x_i (i=1..3) - количество произведенных объемов бензина каждого вида. Прибыль можно подсчитать по формуле (целевая функция) $Z= 12c_1x_1+ 7c_2x_2+ 8c_3x_3$ – множители отражают объем смеси при сливании. Например, при сливании 2л алкилата, 3л крекинг-бензина, 5л бензина прямой перегонки и 2л изопентана получается 12л бензина А.

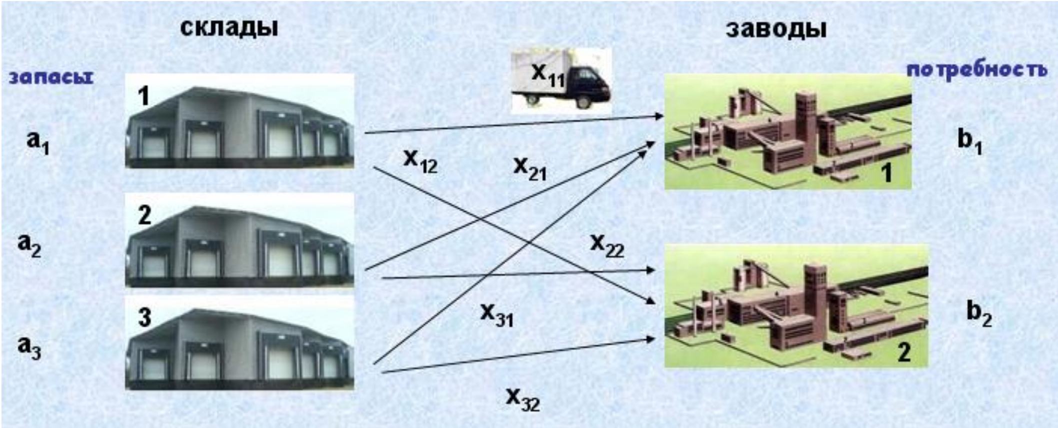
Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le b_1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le b_2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \le b_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le b_4 \end{cases}$$

Необходимо найти оптимальную совокупность x_1, x_2, x_3, при которых Z – максимальна.

Транспортная задача

Имеется однородный груз, который нужно перевести с n складов на m заводов. Для каждого склада i известно, сколько в нём находится груза a_i, а для каждого завода известна его потребность b_j в грузе. Стоимость перевозки пропорциональна расстоянию от склада до завода (затраты на перевозку единицы груза c_{ij} от i-го склада до j-го завода известны). Требуется составить наиболее дешёвый план перевозки. Параметрами являются x_{ij} — количества груза, перевезённого из i-го склада на j-й завод.



Пример 3.

На двух складах имеется 11 и 14 единиц однородного груза. Три магазина нуждаются соответственно в 10, 8 и 7 единицах груза. Стоимость перевозки представлена в таблице. Составить план перевозок грузов с минимальными затратами.

Магазины / Склады	№1(потребность 10)	№2(потребность 8)	№3(потребность 7)
№1(имеется 11)	8	6	5
№2(имеется 14)	4	5	7

Целевая функция (затраты): $Z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=8x_{11}+6x_{12}+5x_{13}+4x_{21}+5x_{22}+7x_{23}$

Система ограничений:

$$\begin{cases}8x_{11}+6x_{12}+5x_{13}\le 11\\ 4x_{21}+5x_{22}+7x_{23}\le 14\\ 8x_{11}+4x_{21}=10\\ 6x_{12}+5x_{22}=8\\ 5x_{13}+7x_{23}=7\end{cases}$$

Геометрическая интерпретация основной задачи ЛП

Ограничения (2) можно переписать в виде $y_i=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge 0$. Каждое такое ограничение определяет в n-мерном пространстве полупространство точек ($x_1,x_2\ldots x_n$) с одной стороны от плоскости $y_i=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0$ и на самой плоскости. Точки на пересечении всех таких полупространств образуют в n-мерном пространстве выпуклый многогранник – «симплекс».

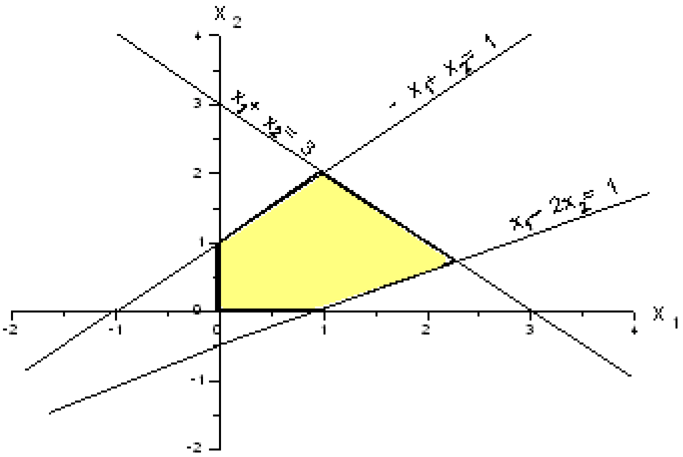
Значение целевой функции $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ в некоторой точке n-мерного пространства $(x_1^1,x_2^1,\ldots x_n^1)$ можно рассматривать как расстояние от этой точки до плоскости $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=0$, проходящей через начало координат. Передвигая эту плоскость параллельно самой себе так, чтобы она проходила через вершины симплекса, можно найти Z=min для ближайшей к началу координат вершины симплекса и Z=max – для самой удаленной от начала координат вершины.

Пример геометрической интерпретации задачи ЛП

Решим задачу

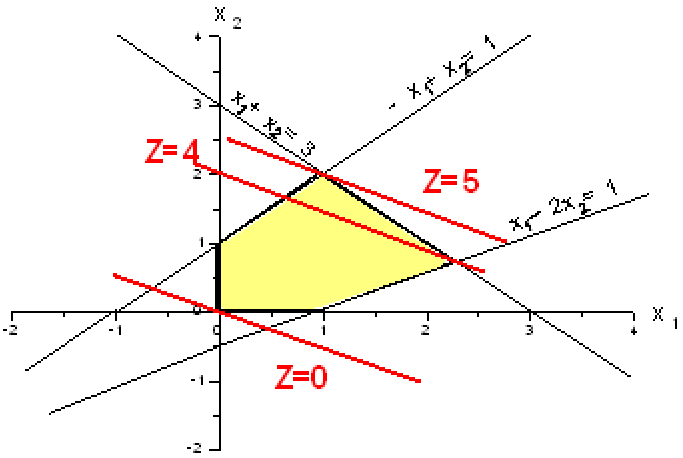
$$x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$$

Рассмотрим сначала область пространства, точки которого удовлетворяют ограничениям задачи:



Так как переменных только две, эта область пространства(симплекс) является плоской фигурой и ограничена прямыми.

Целевая функция также может быть построена на этом рисунке. Изобразим на нем Z=0, Z=4 и Z=5



Очевидно, что прямая Z=5 проходит через наиболее удаленную от начала координат точку, удовлетворяющую ограничениям. Эта вершина является пересечением прямых

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$ и соответствует $x_1=1$, $x_2=2$, что и является оптимальным планом.

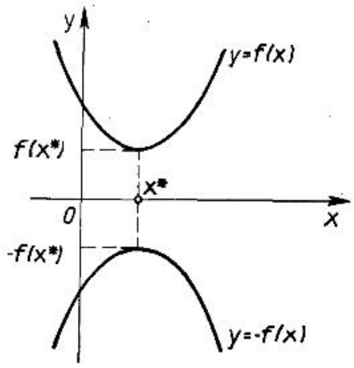
Симплекс-метод

Итак, задача состоит в подборе проектных параметров x_1, x_2,…, x_n, минимизирующих линейную целевую функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

При заданных ограничениях в виде системы неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m. \end{aligned}$$



Если в задаче нужно найти максимум целевой функции, никаких принципиальных отличий в методе решения не будет, так как максимум функции Z будет соответствовать минимуму функции –Z (см. рис.)

На первом этапе **запишем ограничения в виде равенств:**

Неравенства преобразуются в равенства путем введения дополнительных неотрицательных балансовых переменных.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \quad \to \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

Число параметров при этом увеличится, но принципиально ничего не меняется. В дальнейшем будем считать, что ограничения являются системой m уравнений, содержащих n параметров, коэффициенты aj пронумеруем двумя индексами (номером уравнения и номером параметра).

Таким образом, система ограничений имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (4)$$

Считаем, что:

- Уравнения в системе (4) линейно независимы (нельзя выразить одни уравнения как комбинацию других – такие уравнения отбрасываются)
- Система совместна (т.е. среди уравнений нет противоречивых)
- Считаем, что $m<n$, так как при $m=n$ система имеет одно решение (набор x_1, x_2,…, x_n) и целевую функцию Z нельзя оптимизировать.

Из первого уравнения системы (4) можно выразить x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m - \frac{a_{1m+1}}{a_{11}}x_{m+1} - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

Обозначим

$$p_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m; \quad q_{1,m+1} = -\frac{a_{1m+1}}{a_{11}}; \quad \ldots q_{1,n} = -\frac{a_{1n}}{a_{11}}$$

Тогда

$$x_1 = p_1 + q_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + q_{1,n} x_n$$

Выразим соответствующий параметр в каждом уравнении

$$x_1 = p_1 + q_{1,m+1} x_{m+1} + q_{1,m+2} x_{m+2} + \ldots + q_{1n} x_n,$$

$$x_2 = p_2 + q_{2,m+1} x_{m+1} + q_{2,m+2} x_{m+2} + \ldots + q_{2n} x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = p_m + q_{m,m+1} x_{m+1} + q_{m,m+2} x_{m+2} + \ldots + q_{mn} x_n. \quad (5)$$

Набор **$x_1, x_2, \ldots, x_m$** назовём **базисными параметрами:**

Набор **$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$** назовём **свободными параметрами.**

Целевая функция также записывается через свободные параметры:

$$Z = d_0 + d_{m+1} x_{m+1} + d_{m+2} x_{m+2} + \ldots d_n x_n \quad (6)$$

Выберем начальные значения параметров

$x_1=0, x_2=0, \ldots, x_m=0, \ldots, x_n=0$

Тогда из (3) получим:

$$x_1 = p_1, \quad \ldots, \quad x_m = p_m, \quad x_{m+1} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Значение целевой функции из (6) $Z=d_0$

Но это значение, скорее всего неоптимально (не достигло минимума). Ведь параметры больше нуля и, если какое-нибудь из d_{m+1}, d_{m+2} … d_n <0, значение Z можно уменьшить.

Будем считать, что $d_{m+1}<0$. (*)

Тогда, при увеличении x_{m+1}, целевая функция – уменьшится. Однако, найденное x_{m+1} нельзя бесконечно увеличивать, так как в системе (5) базисные параметры x_i могут стать отрицательными.

Новое значение $x_{m+1}^{(1)}$ найдем из соотношений:

$$p_i + q_{i,m+1} x_{m+1}^{(1)} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Причем, среди всех отрицательных выберем $q_{i,m+1}$, соответствующее наименьшему $\left| p_i / q_{i,m+1} \right|$ Пусть это $q_{j,m+1}$, Обозначим

$$Q = q_{j,m+1}$$

$$P = p_j$$

Тогда новым опорным решением будет

$$\left.\begin{aligned} x_i &= p_i - \frac{P}{Q} q_{i,m+1}, \quad i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m, \\ x_{m+1} &= -\frac{P}{Q}, \end{aligned}\right\}$$

Новые базисные параметры

$$x_j = 0, \qquad x_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Новые свободные параметры

Целевая функция

$$Z^{(1)} = d_0 - d_{m+1}\frac{P}{Q}$$

-уменьшилась, т.к. P>0, Q<0, d_{m+1}<0

Перепишем систему уравнений (5) для новых базисных параметров, а целевую функцию (6) –через новые свободные и повторим процедуру с шага (*). Будем повторять, пока целевая функция не станет минимальной.

Простое описание симплекс-метода для конкретного примера можно найти на странице http://abc.vvsu.ru/Books/ebooks_iskt/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8/%D0%98%D1%81%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B9/fmi.asf.ru/vavilov/sm6.htm.