Министерство образования и науки РФ

ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»

Кафедра экспериментальной физики

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
В ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Кемерово 2008

ББК В19$_{я}$73-4
УДК 621.396.218
Р 47

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, профессор
Г. И. Колесников,

Численные методы в физических задачах. Для студентов физических факультетов /ГОУ ВПО «Кемеровский госуниверситет»; сост. Т. Ю. Павлова. Кемерово, 2008. - 102 с.

Предлагаемое учебное пособие разработано по курсу «Информатика» (часть 2: «Численные методы и математическое моделирование») для специальности 010400 «Физика». Пособие предназначено для сопровождения лабораторных занятий по численным методам (задачи интерполяции, аппроксимации, решения нелинейных уравнений и ОДУ) и содержит краткую теорию численных методов, примеры, задания и подборку соответствующих задач физического содержания. Для решения задач предполагается использовать пакет для математических вычислений MathCad, поэтому в пособии приведено описание принципов работы с пакетом, способов применения функций, реализующих нужные численные методы. Для студентов физических и технических факультетов.

© Павлова Т. Ю.,2008
© ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», 2008

Содержание

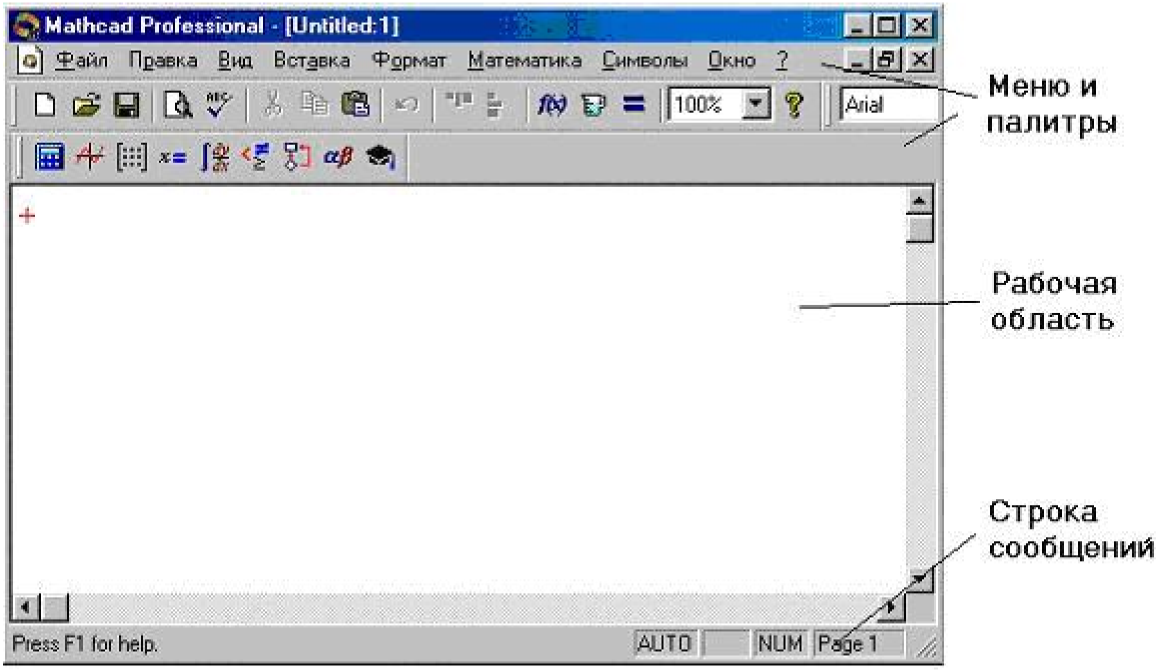
Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАБОТЕ С ПАКЕТОМ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ MATHCAD

§1.1. Интерфейс пользователя

MathCad является программным продуктом компании MathSoft и предназначен для научно-технических расчетов. В состав пакета входят:
-мощный текстовый редактор, позволяющий вводить и редакти-ровать текст и математические выражения;
-вычислительный процессор, проводящий расчеты с использова-нием встроенных численных методов;
-символьный процессор, проводящий символьные вычисления, например, разложение выражений на множители, дифференцирование и интегрирование;
-библиотека справочной информации.

Рабочее окно

MathCad представляет собой:



Главное меню

Стандартно выполненное меню windows-приложения. При выборе пункта главного меню разворачивается вложенные меню, содержащие конкретные команды. Многие пункты дублированы кнопками на панелях инструментов. Содержание пунктов главного меню:

Файл – команды создания, открытия, сохранения, печати, пе-ресылки по электронной почте файлов с документами;

Правка – команды копирования, удаления, вставки из буфера фрагментов документа и др.;

Вид – команды, управляющие видом документа в рабочем окне, выводом панелей инструментов, команды создания файлов анимации;

Вставка – команды вставки в документ различных объектов;

Формат – команды форматирования формул, вывода чисел, текста;

Математика – команды управления вычислениями, установки встроенных констант;

Символьные вычисления – команды символьных вычислений;

Окно – команды, управляющие расположением на экране окон с различными документами;

Помощь – вызов справочной информации.

Панели инструментов

В пакете MathCad имеется три панели инструментов, предназначенные для быстрого выбора часто используемых команд:

- Панель Стандартная – содержит действия с файлами, объектами, фрагментами документа;
- Панель Форматирование – содержит команды форматирования текста и формул;
- Панель Математическая – служит для вставки в документ математических символов.

Некоторые команды панели Стандартная:

-создать новый документ
-открыть существующий документ
-записать на диск

-вырезать выделенное
-копировать
-вставить из буфера
-отменить последнее действие

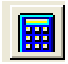
-выровнять выделенную группу объектов по горизонтали;
-выровнять выделенную группу объектов по вертикали;
-вызвать список функций.

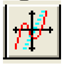
Панель Форматирование

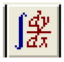
Как и в других приложениях Windows, содержит стандартные команды: выбор стиля текста и формул, выбор шрифта, размера, специального начертания (жирный, наклонный, подчеркнутый), способы выравнивания текста (по левому краю, по центру, по правому краю).

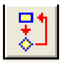
Панель Математическая

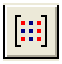
Содержит клавиши**,** при выборе которых разворачиваются **палитры** шаблонов математических операций:

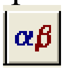
арифметические операторы 

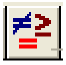
графики 

вычисления 

программирование 

матричные и векторные операции 

греческие буквы 

логические операторы 

Кроме главного меню имеются «всплывающие» (**контекстные меню**), которые можно вызвать, щелкнув правой кнопкой мыши в любой области документа. Они содержат набор операций, которые могут понадобиться в данном месте документа. Понятно, что состав таких меню зависит от места их вызова.

§1.2. Оформление документа

Документ MathCad может создаваться не только в произвольном виде, но и по шаблону. Шаблон представляет собой заготовку документа в определенном стиле оформления, может содержать текст, заготовки графиков, формул и др. Можно создать свой шаблон.

Сохранить документ можно также различным образом (меню File/Save as – Файл/Сохранить как- и далее выбрать тип файла из списка внизу окна). Имеется возможность сохранения в виде html –файла, rtf-файла (то есть файла в формате текстового редактора, например, Word), в форматах более ранних версий MathCad.

Режимы вычислений MathCad

1) автоматический (сразу же производит пересчет при наборе **=**; после щелчка вне графика или функции, график перестроится) в строчке сообщений «авто» (auto) –включается по умолчанию
2) ручной режим . Пересчет проводится по требованию. Удобно, когда введенный документ требует длительных вычислений и для этого требуется значительное время. Тогда для внесения изменений в автоматическом режиме нужно ждать. Переход в ручной режим: через меню: Сервис/Пересчитать/ Считать автоматически (отменить флажок). Для расчета необходимо нажать клавишу F9 или кнопка со знаком

равенства на панели инструментов или в меню Математика/Пересчитать. **ESC** – прервать вычисления.

Просмотр документа

MathCad просматривает документ сверху вниз и слева направо.
Если пользователь это забывает, часто возникает ошибки.

<u>Следствия</u>:

1) Выражение, содержащее знаки присваивания (:=) воздействует на содержимое документа справа и ниже себя.

$$2 \cdot x + 1 = \blacksquare$$

$$x := 5$$

$$2 \cdot x + 1 = 11$$

$$x := 10$$

$$2 \cdot x + 1 = 21$$

2) Переменные могут быть определены в документе неоднократно. При расчете используется последнее определение.
3) Что ниже и правее определяется по точке привязки (левый угол области набора). Увидеть области: меню Правка/показать области/области (Edit/Regions/Video Regions/View Regions) При этом MathCad отображает белые окна областей на сером фоне пустого рабочего пространства. Для удобства можно выровнять области по горизонтали или вертикали (выделить области и нажать клавиши на панели инструментов).

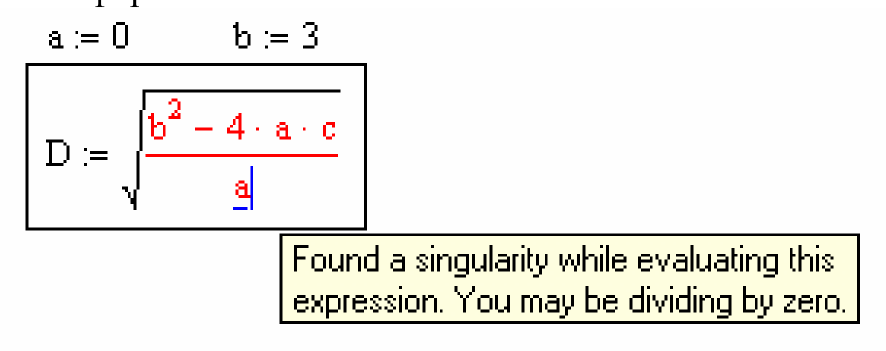
Набор документа

По умолчанию MathCad считает, что начинается набор формулы, но можно набрать и поясняющий текст. Для этого нужно нажать клавишу [“], после чего появится характерный текстовый курсор в виде вертикальной черты.

Особые неприятности создает необходимость редактирования формул. Для этого необходимо выставить курсор в нужное место. Мышью это удается далеко не всегда. Используйте для перемещения курсора (угловой рамки) внутри формулы клавиши стрелок, пробел и клавишу [Ins]. Пробел циклически выделяет части формулы, [Ins] –переводит линию ввода с одной границы формулы на другую. Перейти от набора степени к нормальным символам можно клавишей стрелка вправо.

Отображение ошибок

1. Если значение переменной или функции не определено, в MathCad - 2001 – такие имена выделяются красным.
2. Если при вычислениях выражения произошла ошибка, это выражение помечается сообщением об ошибке. Эти сообщения весьма информативны.



Формат вывода числовых данных

В MathCad можно влиять на формат отображения результатов вычислений. Ввод и вывод данных может производиться в двух основных представлениях:

-десятичное (например, 1348.745903);

-с порядком (например, $1.348*10^3$);

Для управления отображением числовых данных имеются параметры:

-количество отображаемых десятичных знаков (например, 1348.7459 –с четырьмя, 1348.74-с двумя десятичными знаками);

-отображение или сокрытие незначащих нулей справа;

-порядковый порог, после которого десятичное число будет показываться с порядком;

-округление малых чисел до нуля при отображении.

Изменение первых трех параметров производится в меню Формат/Формат числа/Формат результата. Последний выставляется в меню Формат/Формат числа/Формат результата в закладке Tolerance (точность) установкой Zero threshold (Порог нуля).

Глава 2. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§2.1. Переменные и функции.

Простые переменные

определение переменной:

имя := выражение

Например:

$$a := 5$$

$$A := \sqrt{5} + a$$

Замечание: имена, набранные разными шрифтами, строчными и прописными буквами являются именами разных переменных (во избежание ошибок не пользуйтесь разными шрифтами при наборе).

Имена переменных могут содержать:

1) Прописные и строчные латинские буквы
2) Цифры
3) Знак подчеркивания _
4) Штрих `
5) Символ %
6) Греческие буквы
7) Символ бесконечности ∞ (Ctrl + Z)

Ограничения

1) Не могут содержать пробелы
2) Имя начинается только с буквы или ∞
3) ∞ может быть только первым символом
4) имена не должны совпадать с именами встроенных констант и функций, так как в этом случае соответствующая функция перестанет корректно функционировать.

Буквенные индексы

MathCad допускает создание буквенного индекса. Буквенный индекс набирается после нажатия клавиши “ **.** “ (точка). Однако это- не индекс элемента массива.

Индекс элемента массива набирается после выбора на панели «Матрица» символа x_n или нажатия клавиши “[“.

Зарезервированные имена

π = 3.14159 - (15 значащих цифр);

e = 2.71828 - основание натурального логарифма;
E = 10^{307} - бесконечность;
% = 0.01 - процент можно использовать $a \cdot \%$ для получения процентов;
TOL = 10^{-3} - допускаемая погрешность для различных алгоритмов;
ORIGIN = 0 - индекс первого элемента массива;
Другие: PRNCOL WIDTH, PRNPRECISION FRAME

Предопределенные переменные

TOL - … PRNPREC определены уже при запуске MathCad. Их можно переопределить с помощью меню Математика/Встроенные переменные (Math/Built-In Variables).

Интервальные переменные

Интервальные переменные (дискретные аргументы) – переменные, принимающие ряд значений.

Общий вид:

Имя : = Диапазон значений

Пример:

i := 0.. 15

Интересующая переменная i принимает все значения от 0 до 15 с шагом 1. Можно выбрать другой шаг:

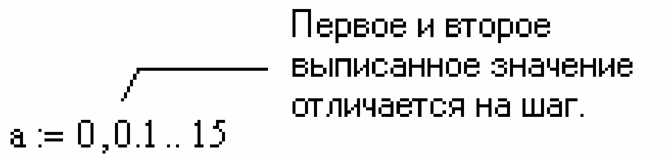


Таблица вывода – для просмотра значений интересующей переменной наберите:

имя =

Все её значения отобразятся в виде таблицы. Также в виде таблицы отобразятся результаты вычисления выражения с интересующей переменной.

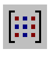
Векторы и матрицы

Вектором называется столбец чисел. Матрица – прямоугольная таблица чисел.

Создание:

<u>1 способ</u>

а) выставить курсор

б) палитра матрицы 

в) выбрать количество строк (Rows) и столбцов (Columns).

Соответствующий бланк будет создан на месте курсора.

г) щелкай мышью в заготовленных окнах бланка, заполняем их.

2 способ использование нижних индексов.

При этом можно зажать диапазон ин-дексов с помощью интервальной пе-ременной, а затем задавать значения отдельных элементов массива или всех по формуле.

$$i := 0..100$$

$$x_i := 1 + i$$

$$x_3 := 5$$

$$x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Функции.

Отличаются от переменных наличием аргумента

Общее определение:

Имя(список аргументов):= выражение

Замечание: при определении аргументы являются формальными, то есть указывают, как будут использоваться при вычислениях. Перед вычислением значения функции аргументы должны быть определены. В примере ниже первая строка является определением функции, третья – вычислением значения функции для x=a и y=2, ошибка в последней строке вызвана неопределенностью аргумента x=s.

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$a := 5$$

$$f(a,2) = 5.385$$

$$\boxed{f(s,2) = \blacksquare}$$

The units in this expression do not match.

§2.2. Символьные вычисления.

Кроме численных расчетов, с помощью пакета MathCad можно производить и численные вычисления. Они доступны при использовании:

- пункта меню Символьные вычисления;

- панели Символьные вычисления.

При попытке выполнения символьных вычислений необходимо помнить, что многие вычисления могут быть проведены только численно.

При использовании меню лучше сначала выбрать стиль выводимого решения в меню Символьные вычисления, пункт Стиль вычислений (выберите соответствующие пункты в открывающемся окне): символьное решение может быть выведено горизонтально (рядом с исходным выражением), вертикально (под ним), с комментариями и без них.

Чтобы произвести символьные операции, нужно выделить выражение или его часть с помощью мыши.

Некоторые символьные операции:

Символьная оценка.

-пункт Оценить, в котором можно выбрать подпункты Символически, С плавающей точкой, В комплексной форме. Оценки «С плавающей точкой» и «Символически» сделаны в данном примере.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+1)} \quad \text{floating point evaluation yields} \quad 1.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \text{yields} \quad \frac{1}{6}\cdot\pi^2$$

Упрощение выражений.

- пункт «Упростить». Символьный процессор сокращает общие множители, использует тригонометрические тождества, уменьшает степени.

Вычисление производных и интегралов.

Производную или интеграл символьно с помощью пакета MathCad можно вычислить двумя способами:

- В выражении без знаков производной или интеграла выделите переменную, по которой нужно произвести дифференцирование или интегрирование и выберите пункт меню Символьные вычисления/ Переменная/ Дифференцировать (Интегрировать).
- На панели «Арифметические операторы» выберите шаблон дифференцирования или интегрирования и заполните его. Выберите пункт меню Символьные вычисления/ Оценить/ Символьно.

Символьное решение уравнений и неравенств.

Для символьного решения уравнения или неравенства нужно сделать следующее:

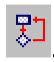
-ввести уравнение, использовав жирный знак равенства на панели «Логические операторы». Если в выражении отсутствует логический оператор, то считается, что выражение равно нулю;

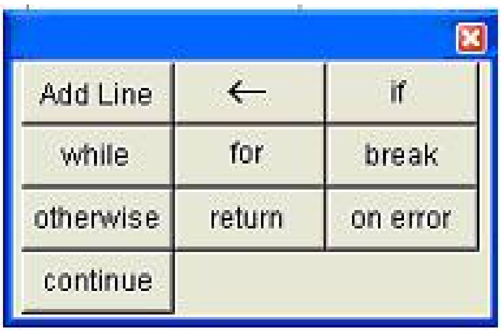
-выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение (неравенство);

-выбрать команду меню Символьные вычисления/ Переменная/Решить.

§2.3. Программирование

MathCad позволяет писать программы, т.е. выражения, которые состоят из других выражений. Имеются условные операторы, операторы циклов, можно использовать подпрограммы.

Для набора программы используют палитру программирования , имеющую вид:



Для оформления программы (оформляется вертикальной чертой) используется команда Add Line – задает две линии. Для появления еще одной строки необходимо выделить весь текст, ограниченный чертой, и еще раз вызвать команду Add Line.

Локальный оператор присваивания ←

Имеется возможность ввести локальные переменные и рассчитать функцию по частям, используя локальный оператор присваивания. Например, вместо функции x(a,b,c), можно написать программу для вычисления x1(a,b,c):

$$x(a,b,c) := \frac{-b+\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x1(a,b,c) := \left| \begin{array}{l} D \leftarrow b^2 - 4a\cdot c \\ z \leftarrow -b + \sqrt{D} \\ \dfrac{z}{2\cdot a} \end{array} \right.$$

$$x1(1,-2,1) = \blacksquare$$

Условные операторы

Можно запрограммировать функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0 \ \text{(в др. случаях)} \end{cases}$$

в MathCad:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} x \ \text{ if } \ x > 0 \\ x^2 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$f(2) = \blacksquare$ $\qquad$ $f(-2) = \blacksquare$

Тоже самое можно записать иначе

$$g(x) := \mathrm{if}\left(x > 0, x, x^2\right)$$

$g(2) = \blacksquare$ $\quad$ $g(-2) = \blacksquare$

при этом **if** нужно набирать «руками» побуквенно.

Операторы цикла While и for

Общий вид:

while условие выполнения
Тело цикла

For переменная $\in$ интервал
Тело цикла

Переменные (i , например) не определяется вне программы

```
y := | i ← 0
     | while i < 6
     |   i ← i + 1
     | i

y = ▮
```

Оператор останова

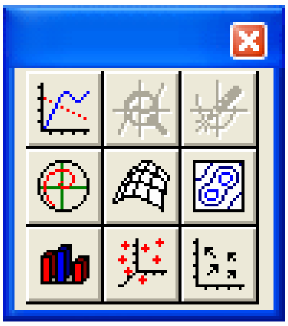
break if условие:

```
y := | i ← 0
     | while i < 6
     |   | i ← i + 1
     |   | (break)  if i > 3
     | i

y = ▮
```

§2.4.Графические возможности пакета.

Построение графиков производится с помощью палитры «Графики», на которой выбирается нужный тип графика: в частности, имеются: график в декартовой системе координат (левая верхняя клавиша), график в полярной системе координат (первая клавиша в среднем ряду), различные виды трехмерных графиков (остальные клавиши в среднем и нижнем рядах). Две оставшиеся клавиши в верхнем ряду позволяют увеличить выделенный участок двухмерного графика и считать координату выделенной на графике точки.



Построение двухмерного графика

Для построения двумерного графика (в декартовой или полярной системах координат) необходимы следующие действия:

-выставить курсор на место построения графика;

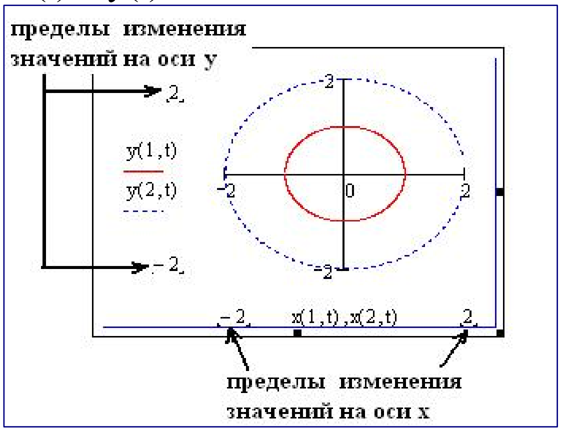
-открыть бланк графика (с помощью палитры «График»);

-заполнить поля аргументов (щелкнуть мышью, написать имя переменной);

-щелкнуть мышью вне бланка графика.

Для построения второй функции на том же графике, необходимо выставить курсор возле имени независимой переменной (x), набрать запятую и имя другой независимой переменной, затем проделать то же для имени функции.

Для построения графика параметрической функции (функции, для которой x=x(t), y=y(t), где t-параметр), нужно заранее определить параметр как интервальную переменную, определить зависимости x=x(t), y=y(t), а затем построить график описанным выше образом, записав в поля аргументов графика имена функций x(t) и y(t).

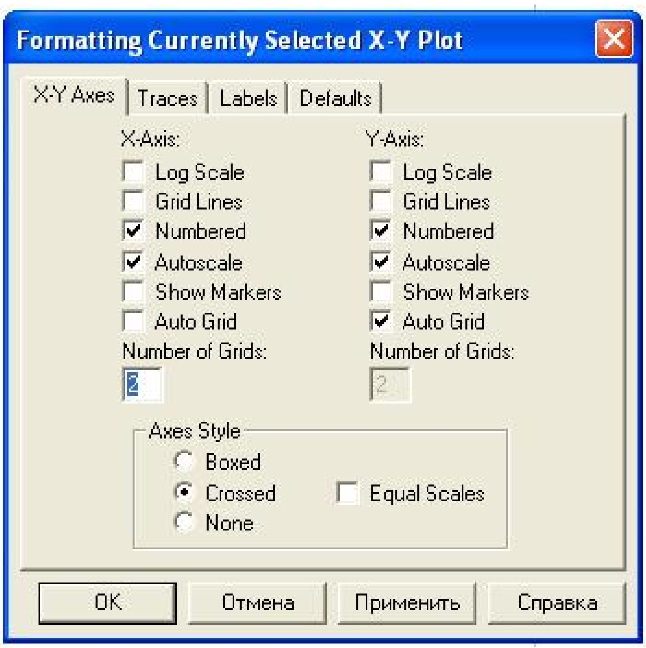


Форматирование графика

- **Изменение пределов осей координат**

  -щелкнуть по графику так, чтобы он выделился
  -выставить курсор на появившиеся пределы осей
  -исправить пределы осей
  -щелкнуть вне графика.

- **Работа с диалоговым меню графика** (вызов двойным щелчком на графике)



-изменение стиля прорисовки осей Выбрать закладку X-Y Axes – Оси X-Y(рисунок слева – закладки расположены сразу под синим заголовком меню), в пункте Axe Style (Стиль осей X-Y) выбрать другой стиль прорисовки осей, нажать на кнопку OK или Применить;

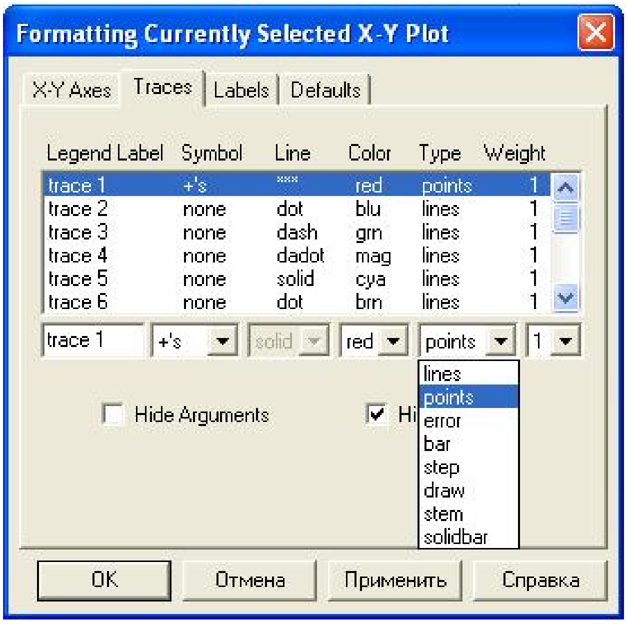
-изменение числа меток

Выбрать закладку X-Y Axes (Оси X-Y), в пункте AutoGrid (Автосетка) отменить флажок, проставить другое число в Number of Grids (№ Сеток - на рисунке именно там стоит синий курсор). Число соответствует числу интервалов между метками, которое нужно получить на данной оси:

Число_интервалов=
(мах_значение_оси-мин_значение_оси)/шаг_между_метками

Нажать на кнопку OK или Применить;

-изменение стиля линии графика



Меню на закладке Traces (Следы) позволяет редактировать стиль рисования линий. Для этого после вызова диалогового меню нужно выбрать закладку Traces, щелчком выбрать кривую из списка кривых, например, trace1. Выбранная кривая будет отмечена длинным синим курсором и ее название появится в первом окне стилей внизу. С помощью остальных окон можно выбрать стиль прорисовки точек на графике, щелкнув на стрелке в окне справа (там сначала проставлено none), на рисунке слева выбран +. В следующем окне выбирается стиль соединительной линии (это окно не активно, если график изображается только точками). Следующее окно служит для выбора цвета точек и линии. В предпоследнем окне определяется стиль графика, в частности, для рисования точками нужно выбрать points. Последнее окно регулирует размер точки или символа, отмечающего точку на графике. После выбора всех нажать на кнопку OK или Применить);

Построение трехмерного графика

Существует несколько способов построения таких графиков, опишем два из них:

- Построение графика по матрице значений функции:

Определить функцию двух аргументов. Создать векторы значений аргументов и матрицу значений функции. Установить курсор и на панели «Графики» выбрать пункт «График поверхности». В шаблоне графика ввести имя матрицы. Щелкнуть вне графика.

Результат такого построения показан в следующем примере (график слева).

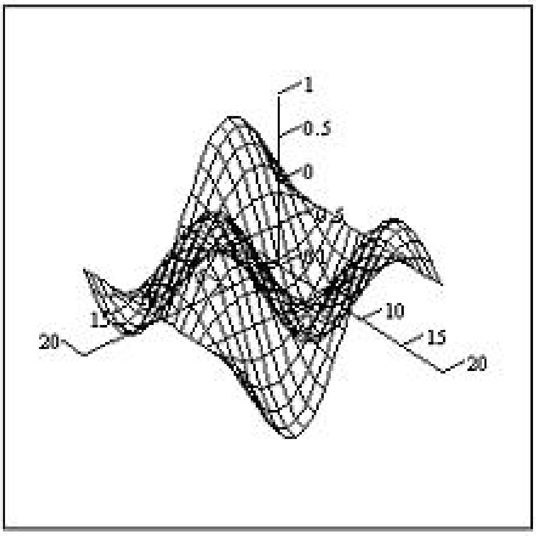
- Быстрое построение графика:

Определить функцию двух аргументов. Установить курсор и на панели «Графики» выбрать пункт «График поверхности». В шаблоне графика ввести имя функции. Щелкнуть вне графика.

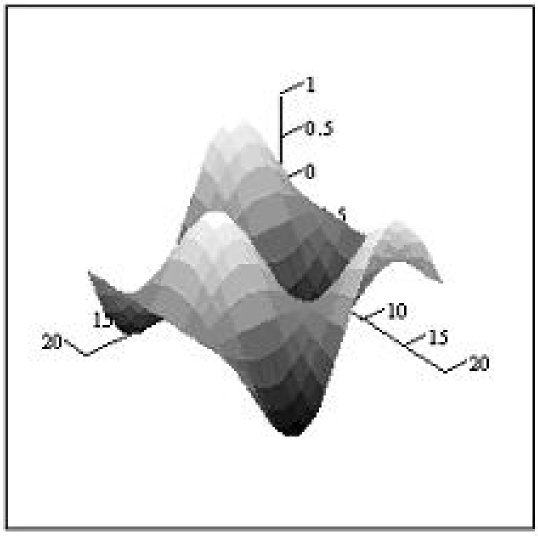
$f(x, y) := \sin(x) \cdot \cos(y) \quad i := 0..20 \qquad j := 0..20$

$x_i := i \cdot \frac{\pi}{10} \qquad y_i := i \cdot \frac{\pi}{10}$

$F_{i,j} := f(x_i, y_j)$



F



F

Разница между двумя способами очевидна: в первом случае построить график сложнее, но пользователь точно знает, что он построен по нужным точкам. При быстром построении графика MathCad по умолчанию выбирает значения обоих аргументов в пределах от –5 до 5 . Впрочем, эти значения можно изменить с помощью диалогового меню.

Для трехмерного графика также имеется диалоговое меню, с помощью которого можно переустановить тип графика (точечный, векторный, лоскутный графики, трехмерная гистограмма), установить тип и цвет заливки, тип осей координат, углы поворота графика. Применение некоторых пунктов диалогового меню продемонстрировано на рисунке справа в вышеприведенном примере. Также, график можно вращать, просто захватив его мышью и делая ею вращательные движения.

§2.5. Практическая работа

Инструменты пакета MathCad

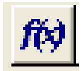
Главное меню

Стандартно выполненное меню windows-приложения. Многие пункты дублированы кнопками на панелях инструментов. Ознакомьтесь выборочно с содержимым выпадающих меню нескольких пунктов (пункты: Файл, Правка, Вид,Формат).

Панель инструментов

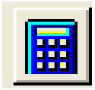
-создать новый документ
-открыть существующий документ
-записать на диск

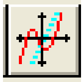
-вырезать выделенное
-копировать
-вставить из буфера
-отменить последнее действие

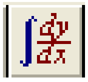


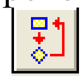
-вызвать список функций

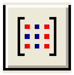
Панель шрифтов
многие возможности организованы как **палитры** :

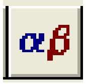
общие арифметические операторы 

графики 

суммы, интегралы, производные 

программирование 

матричные и векторные операции 

греческие буквы 

Задание:
1.Убрать панель инструментов и шрифтов (меню Вид/ Панели инструментов), вернуть панель инструментов;
2. Переместить панель палитр в удобное место (слева или как про-должение панели инструментов).

<u>Общие принципы работы в рабочем окне</u>

а) пользователь управляет курсором (вне выражений- красный крест, внутри –уголок-рамка), который указывает, где начнется запись нового выражения, графика;
б) MathCad рассматривает документ сверху вниз и слева направо.
В данном выражении можно использовать то, что определено выше и левее него.
в)Запись математических выражений максимально приближена к принятому в математике. Выражения можно исправлять, выделяя необходимое курсором-рамкой.

Список **«горячих» клавиш:**

действие	клавиша
Показать результат	=
Установить курсор в нужном месте	Клавиши стрелок, пробел, Insert
Стереть выделенное	Delete, ←
Присвоить	Shift+ ;
Две точки ..	;

<u>Вычисления</u>

а) **Вычисления выражений**
Выставить курсор и набрать

$$15-\frac{3^2-\sqrt{5}}{200}=$$

Замечания:
- Нужно научиться выделению курсором части выражения, используя клавишу пробел
- должно получиться 14.966

б) **Определение переменных**
определим переменную
x := 2·sin(1.57)
распечатать значение переменной
x=

Замечание:
- функцию можно набрать «руками» и с помощью списка функ-ций (кнопка )

в) **Интервальная переменная**
x := -3..3 просмотреть результат x=
x := -3, -2.5 .. 3 просмотреть результат x=
Замечание: шаг определяется как разность между вторым и первым числом.

г) Определение функции
Определим функцию с именем f и параметром a. Рассмотрим различные варианты ее использования:
f(a) := a+cos(a)
f(2)=
b := 3   f(b)=
f(x)=
Замечания:

- функция отличается от переменной указанием в скобках имени аргумента
- аргумент при определении является формальным, т.е. может быть неизвестен, но при вычислении функции он должен быть определен

д) Работа с графикой. Форматирование графика
Постройте в декартовой системе координат график функции f(x) и ознакомьтесь с основными приемами работы с ним:
Построение графика
-открыть бланк графика;
-заполнить поля аргументов (щелкнуть мышью, написать имя переменной);
-щелкнуть мышью вне графика.

- **Изменение пределов осей координат**

-щелкнуть по графику так, чтобы он выделился
-выставить курсор на появившиеся пределы осей
-исправить пределы осей
-щелкнуть вне графика.

- **Работа с диалоговым меню графика (вызов двойным щелчком** на графике)

-изменение стиля прорисовки осей (выбрать закладку X-Y Axes, в пункте Axe Style выбрать другой стиль прорисовки осей, нажать на кнопку OK или Применить);

-изменение числа меток (выбрать закладку X-Y Axes, в пункте AutoGrid отменить флажок, проставить другое число в Number of Grids, нажать на кнопку OK или Применить);

-изменение стиля линии графика –рисование точками (выбрать закладку Traces, из списка кривых выбрать trace1 в первом окне стилей (там проставлено none) выбрать крест или другой символ, в предпоследнем (там проставлено lines) выбрать points, нажать на кнопку OK или Применить);

-исследовать другие имеющиеся пункты стиля линии.

Замечания:

- Для построения второй функции на том же графике, необходимо выставить курсор возле имени независимой переменной (x), набрать запятую и имя другой независимой переменной, затем проделать то же для имени функции;

- Если изображаемые на одном графике функции зависят от одной переменной, то ее имя можно не повторять;
- Часто рассматриваются функции, имеющие параметры (например, $f(x)=a\cdot x+b$). Зависимость от параметров удобно демонстрировать, изображая функцию f(x) несколько раз на одном графике с разными значениями параметров. Для этого нужно включить параметры в список аргументов функции:

$f(x,a,b):=a\cdot x+b$

Дополнительные задания:

1. В новом окне для x=1..5 построить график функции
$u(x)=\sqrt{1+\sin^2(x)}$
2. Там же построить графики функции z(x) для разных a и b:
$z(x)=a\cdot\lg(1+e^{b\cdot x})$

§2.6. Задачи

Построение функций и асимптот в декартовой системе координат.

Построить графики функций с различными значениями параметров и асимптоты (если они есть):

2.1. $y=a\cdot\ln(b\cdot x)$

2.2. $y=tg(a\cdot x)$

2.3. $y=a\cdot x+\sin(a\cdot x)$

2.4. $y=k\cdot e^{n\cdot x}$

2.5. $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

2.6. $y=a\cdot\sin(k\cdot x)$

2.7. $y=a\cdot e^{-k\cdot x}\cdot\sin(x)$

2.8. $y=\cos(w\cdot x+\varphi)$

2.9. $y(t)=a\cdot\sin(w\cdot t)+\sin(a\cdot w\cdot t)$

2.10. $U(x)=\dfrac{kx^2}{2}+\dfrac{rx^3}{3}$

2.11. $P(\lambda)=\dfrac{A}{\lambda^5}\cdot\dfrac{1}{e^{b/\lambda}-1}$

2.12. $P(V)=\dfrac{R\cdot T}{V-b}-\dfrac{a}{V^2}$, R=0.0831, a=1.39, b=0.0391. Кривая представляет собой зависимость давления (в атмосферах) от объема (в литрах) для моля азота. Построить эту зависимость при температурах T=70 K и T=300 K.

Построение функций и асимптот в полярной системе координат.

В задачах 2.13-2.23 построить кривые, заданные в полярных координатах. Пересчет в декартовы координаты выполняется по формулам:

$x = r \cdot \cos(f), \quad y = r \cdot \sin(f)$

Нарисовать оси координат и асимптоты, если они есть.

2.13. Спираль Архимеда: $r = a \cdot f, \quad a > 0, -\infty < f < \infty$

2.14. Параболическая спираль: $r^2 = 2pf, \quad p > 0$

2.15. Логарифмическая спираль: $r = a\exp(p \cdot f), \quad a, p > 0$

2.16. Улитка Паскаля: $r = a \cdot \cos(f) + b \quad , a, b > 0.$

Рассмотреть случаи: $b \geq 2a, a < b < 2a$, $a > b$

2.17. Кардиоида: $r = a \cdot (1 + \cos(f)), \quad a > 0$

2.18. Трилистник: $r = a \cdot \cos(3 \cdot f), \quad a > 0$

2.19. Четырехлистник: $r = a \cdot \cos(2 \cdot f), \quad a > 0$

2.20. Леминиската: $r = a\sqrt{2\cos(2f)}$ $, a > 0$

2.21. Циссоида Диоклеса: $r = a \cdot \left[\dfrac{1}{\cos(f)} - \cos(f) \right]$

2.22. “Крест”: $r = \dfrac{2 \cdot a}{\sin(2 \cdot f)}$

2.23. Трисектриса: $r = a(4\cos(f) - 1/\cos(f))$

Построение функций, заданных параметрически.

В задачах 2.24-2.36 построить кривые, заданные параметрически. Нарисовать оси координат и асимптоты, если они есть.

2.24. Окружность:

$x = r\cos(t), y = R\sin(t), 0 < t < 2\pi.. R - \textit{радиус окружности}$

2.25. Эллипс: $x = R_1 \cos(t), y = R_2 \sin(t), \quad R_1, R_2 - \textit{полуоси эллипса.}\ 0 < t < 2\pi$

2.26. Улитка Паскаля:

$x = A\cos^2(t) + B\cos(t), y = A\cos(t)\sin(t) + B\sin(t).$

$A > 0, B > 0, 0 < t < 2\pi.$

Рассмотреть случаи $B \geq 2A \quad , A < B < 2A, A > B$

2.27. Спираль:

$x = R\cos(t), y = R\sin(t), R = t/2, \quad 0 < t < 2$

2.28.Циклоида:
$x = a(t - \lambda \sin(t)),\ y = (1 - \lambda \cos(t)).\ a > 0, -\infty < t < \infty.$
$\lambda = 1 -$ *циклоида*, $\lambda < 1 -$ *укороченная циклоида*, $\lambda > 1 -$ *удлиненная циклоида*.
2.29. Фигуры Лиссажу:
$x = \cos(at),\ y = \cos(bt + \varphi).$

Рассмотреть случаи : $a / b = 1, 1/2, 1/3, 2/3, 3/4.$

2.30. Декартов лист:
$x = 3at / (1 + t^3),\ \ y = 3at^2 / (1 + t^3),\ \ -\infty < t < -1,\ \ -1 < t < \infty.$
2.31. Астроида:
$x = a \cos^3(t),\ \ y = a \sin^3(t).$
2.32. Эпициклоида:
$x = (a + b)\cos(t) - a\cos((a + b)t / a);$
$y = (a + b)\sin(t) - a\sin((a + b)t / a),\ \ a > 0, b > 0.$

Рассмотреть случаи:
а) b/a- целое положительное число, $t \in [0, 2\pi)$.
б) b/a= p/q, где p и q- положительные целые взаимно простые числа, $t \in (0, 2\pi q)$.

2.33. Гипоциклоида (рассмотреть случаи: m=2,3,4.):
$x = (b - a)\sin(at / b) - a\sin((b - a)t / b);$
$y = (b - a)\cos(at / b) + a\cos((b - a)t / b),\ \ m = b / a.$
2.34. Трактриса:
$x = a(\cos(t) + \ln(tg(t / 2)));\ y = a\sin(t).$
2.35. Строфоида:
$x = a(t^2 - 1) / (t^2 + 1),\ \ y = at(t^2 - 1) / (t^2 + 1),\ \ -\infty < t < \infty,\ \ a > 0$
2.36. Конхоида Нихомеда:
$x = A + L\cos(t),\ \ y = Atg(t) + L\sin(t).$
$t \in (-\pi / 2, \pi / 2) -$ *правая ветвь* $t \in (\pi / 2, 3\pi / 2) -$ *левая ветвь*
A>0, L>0. Рассмотреть случаи: L<A, L>A, L=A.

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

§3.1. Интерполяция функций

Краткая теория

Постановка задачи

В задачах данного типа имеется набор значений x_i и соответствующих им значений y_i, i=0,1,…,n (допустим, полученных экспериментально). Необходимо получить значение y аргумента xx, которое принадлежит отрезку $[x_0, x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i. Поставленную задачу можно решать двумя способами:

1. Построить аналитическую функцию F(x) таким образом, чтобы она проходила через данные точки (x_i, y_i), т.е. $F(x_0)= y_0$, $F(x_1)= y_1$, …, $F(x_n)= y_n$. В этом случае нахождение F(x) называют **интерполяцией**, точки (x_i, y_i), узлами интерполяции, точку xx – точкой интерполяции, а F(x)-интерполяционной функцией.

2. Найти теоретическую зависимость (например, физический закон) y=f(x), которая связывает x и y, причем эта функция должна содержать параметры. В этой функции можно подобрать параметры таким образом, что F(x) будет наиболее близко проходить около известных точек (x_i, y_i). Такой подход называется **апроксимацией**. Одним из способов апроксимации является метод наименьших квадратов. В этом случае нахождение f(x) называют апроксимацией , а f(x) –апроксимирующей функцией.

В данном разделе рассматривается интерполяция функций.

Интерполяция называется кусочной, если для построения F(x) используется только часть точек (x_i, y_i).

Интерполяция называется линейной, если в качестве F(x) используется полином первой степени, при этом через каждые две точки проводится прямая.

Некоторые методы интерполяции:

Метод Лагранжа

Для (n+1) узла строят полином n-й степени в виде:

$$y(x) \approx F(x)=L_n(x)=\ell_0(x)+\ell_1(x)+\ell_2(x)+\ldots+\ell_n(x)=\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)$$

где $\ell_i(x)$-многочлен степени n. Так как интерполирующая функция должна проходить через все узлы, то

$\ell_i(x_j)= \begin{cases} y_i, i=j, (a) \\ 0, i \neq j, (б) \end{cases}$

$\ell_i(x)$ составляют следующим образом:

$$\ell_i(x)=C_i(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)$$

Здесь C_i-const, в произведении нет скобки $(x-x_i)$. Такая функция удовлетворяет условию (б), то есть

$$\ell_i(x_j)=0, \text{ при } i \neq j,$$

Из условия (а) имеем

$$\ell_i(x_i)=y_i=C_i(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)$$

отсюда

$$C_i=\frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Таким образом, интерполяционная формула Лагранжа (Полином Лагранжа) имеет вид:

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i * \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} =$$

$$=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Функция F(x) является полиномом и если интерполяция проводится по (n+1) точке, то высшая степень полинома n. Например:

Интерполяционный полином, проходящий по 2-м узлам (x_0,y_0), (x_1,y_1)

$$y(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \quad \text{- прямая}$$

При этом легко видеть, что он действительно проходит через узел (x_0,y_0)

$$y(x_0)=y_0\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x_0-x_0}{x_1-x_0}=y_0$$

и узел (x_1,y_1):

$$y(x_1)=y_0\frac{x_1-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}=y_1$$

Интерполяция по трем узлам (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)

$$y(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- парабола.

Аналогично можно написать выражение для интерполяции по 4, 5, 6 и т.д. узлам.

Метод Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона степени n, проходящий через (n+1) точку, строится в виде:

$$y(x)\approx P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}),$$

где a_i – коэффициенты. Так как полином проходит через узел (x_0,y_0), то

$P_n(x_0)=y_0=a_0$

Для второго узла

$P_n(x_1)=y_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$

$y_0+a_1(x_1-x_0)=y_1$

$a_1=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y\ (x_0,x_1)=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ и так далее.

Таким образом, интерполяционная функция Ньютона имеет вид:

$$F(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}(x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_{i-1})\cdot y(x_0,x_1,...,x_i)$$

где введены обозначения для разделенных разностей

$$y(x_0,x_1,...,x_i)=\frac{y(x_1,...,x_i)-y(x_0,x_1,...,x_{i-1})}{x_i-x_0}$$

Разделенные разности первого порядка

$$y(x_0,x_1)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\quad y(x_1,x_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ и так далее.

Разделенные разности второго порядка

$$y(x_0,x_1,x_2)=\frac{y(x_1,x_2)-y(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$ и так далее.

Примеры:

Интерполяция по 2-м узлам (x_0,y_0), (x_1,y_1)

$F(x)= y_0+y(x_0,x_1)(x- x_0)$

Интерполяция по 3-м узлам (x0,y0), (x1,y1), (x2,y2) :

$F(x)= y_0+y(x_0,x_1)(x- x_0)+ y(x_0,x_1, x_2)(x- x_0)(x- x_1)$

Можно показать, что методы Лагранжа и Ньютона дают одну и ту же интерполяционную функцию для одинакового набора узлов интерполяции. Например, для интерполяционного полинома, проходящего через 2 точки:

$$y(x) = L(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x - x_1 + x_0 - x_0}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= (y_1 - y_0) \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} + y_0 \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = = y_0 + y(x_0 x_1)(x - x_0) = N(x)$$

Такой результат является следствием того, что через заданные (n+1) точки можно провести только один интерполяционный многочлен n-той степени.

Точность интерполяции (как по Лагранжу, так и по Ньютону) чаще всего ухудшается с увеличением числа узлов, особенно на границах интервала $[x_0, x_n]$. При этом интерполяционный полином по-прежнему проходит через узлы интерполяции, однако между ними он, как правило, неустойчив и моет иметь значения y(x) сильно отличающиеся от значений ординат соседних узлов интерполяции.

Сплайн-интерполяция.

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными. Наиболее распространены сплайны 3-й степени (кубические полиномы).

Для каждого $x \in [x_{i-1}, x_i]$ кубический сплайн ищется в виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-})^3;$$

Все неизвестные коэффициенты могут быть найдены из условия непрерывности функции и ее первой и второй производных на концах отрезков и из условия нулевой кривизны сплайна (второй производной) на концах рассматриваемого интервала. Таким образом получается система уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0, \\ a_i = y_{i-1}, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}. \end{cases}$$

где i принимает такие значения, что номер любого коэффициента находится в диапазоне 0 до n.

<u>Задание</u>

1. Сформировать массивы x и y экспериментальных точек и изобразить их крестиками на графике №1. Получить значение y для данной точки xx с помощью линейной интерполяции. На графике №1 построить ломаную, представляющую линейную интерполяцию по всем точкам. Ответить на вопросы №1,2.
2. Записать интерполяционный полином Лагранжа по нескольким точкам – по выбору преподавателя. Получить значение интерполяционного полинома в точке xx. Построить интерполяционный полином и данные точки на отрезке $[x_0, x_n]$ на графике №2. Ответить на вопрос №3.
3. (*) Определить функции, соответствующие разделенным разностям. Записать интерполяционный полином Ньютона по тому же количеству точек. Исследовать, отличаются ли значения y в точке xx при интерполяции по разным наборам точек. Продемонстрировать эти отличия на графике №2. Ответить на вопросы №4,5,6.
4. (**) Сформировать вектор вторых производных. Получить значение сплайн- интерполяции в точке xx. Построить сплайн на отрезке $[x_0, x_n]$ на графике №2. Установить, чем отличается сплайн-интерполяция от интерполяции по Лагранжу и Ньютону. Ответить на вопросы №7,8.
   <u>Замечание.</u> Правильное и осмысленное выполнение заданий 1-2 оценивается на "удовлетворительно", заданий 1-3 –на "хорошо", заданий 1-4 -на "отлично".

Указания по выполнению заданий

Пример выполнения задания представлен ниже. Выполняйте свое задание по аналогии. Кроме того:

<u>В задании 1:</u> вектора-столбцы x и y можно сформировать с помощью палитры матричных вычислений, выбрав число столбцов –1 и число строк, равное количеству данных точек.

Для получения интерполяционного значения в точке xx используется функция MathCad Linterp(x,y,xx). Здесь x,y –массивы данных точек, xx – точка, в которой проводится интерполяция.

Для построения функции линейной интерполяции необходимо:

а)определить интервальную переменную на отрезке $[x_0, x_n]$ с достаточно малым шагом (в примере –это переменная z);

б)на вертикальной оси указать в качестве аргумента функцию Linterp , в которой в качестве аргумента использовать переменную из пункта а)

<u>В задании 2:</u> Требуется определить функцию –интерполяционный полином Лагранжа по нужному количеству точек (по выбору преподавателя). Смотрите пример. В качестве аргумента этой функции необходимо определить точку интерполяции xx. При желании, в качестве аргументов

можно поставить номера точек, через которые проводится интерполяция (как в примере: а- точка интерполяции, j1, j2, j3 – номера точек).

<u>В задании 3:</u> Для удобства нахождения разделенных разностей, нужно определить их как функции номеров точек. В примере определена разность первого порядка. Разделенные разности более высоких порядков вводятся аналогично.

<u>В задании 5:</u> для выполнения сплайн- интерполяции необходимо вычислить вектор вторых производных vs:= cspline(x,y) , где имя вектора (vs) можно выбрать любым, x,y- вектора данных. Значение сплайна в точке xx выдает функция interp(vs,x,y,xx). С ее помощью можно построить график сплайна.

<u>Пример</u>

ПРИМЕР

$i := 0..5$

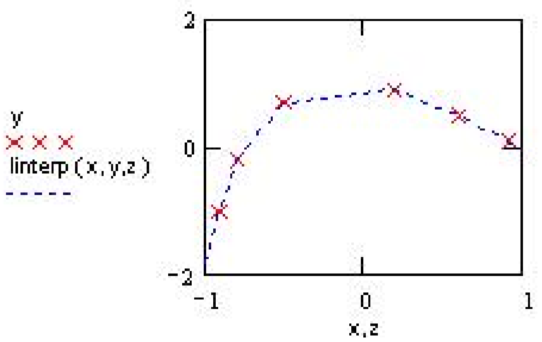
$$x := \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.8 \\ -0.5 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 0.9 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} -1 \\ -0.2 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$z := -1, -0.95..1$

Линейная интерполяция

Значениеинтерполяционной функции
в точке xx:

$xx := -0.6$ $\qquad$ $\mathrm{linterp}(x, y, xx) = 0.4$

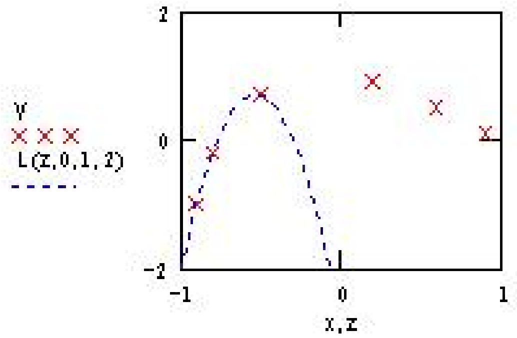


Интерполяция полиномом Лагранжа

$$L(a, j1, j2, j3) := y_{j1} \cdot \frac{(a - x_{j2}) \cdot (a - x_{j3})}{(x_{j1} - x_{j2}) \cdot (x_{j1} - x_{j3})} + y_{j2} \cdot \frac{(a - x_{j1}) \cdot (a - x_{j3})}{(x_{j2} - x_{j1}) \cdot (x_{j2} - x_{j3})} + y_{j3} \cdot \frac{(a - x_{j1}) \cdot (a - x_{j2})}{(x_{j3} - x_{j1}) \cdot (x_{j3} - x_{j2})}$$

Значение полинома в точке xx:

$L(xx, 0, 1, 2) = 0.65$



Интерполяция полиномом Ньютона

Разделенные разности 1-го и 2-го порядков:

$$R1(j1, j2) := \frac{y_{j2} - y_{j1}}{x_{j2} - x_{j1}} \qquad R2(j1, j2, j3) := \frac{R1(j2, j3) - R1(j1, j2)}{x_{j3} - x_{j1}}$$

Полином Ньютона

$$N(a, j1, j2, j3) := y_{j1} + (a - x_{j1}) \cdot R1(j1, j2) + (a - x_{j1}) \cdot (a - x_{j2}) \cdot R2(j1, j2, j3)$$

$N(xx, 0, 1, 2) = 0.65$

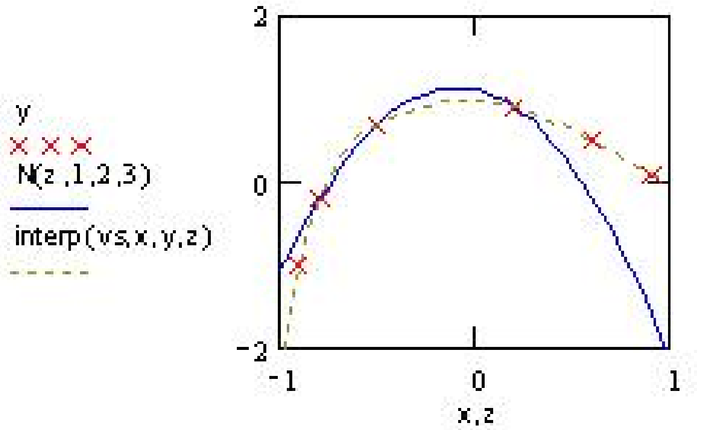
Интерполяция сплайном

Вектор 2-х производных:

vs := cspline(x , y)

Значение сплайна:

interp(vs, x , y , xx) = 0.554



<u>*Контрольные вопросы*</u>

1. В чем состоит задача интерполяции? Чем она отличается от аппроксимации?

2.Как доказать, что данная интерполяционная функция проходит через заданные точки?

3.Запишите полином Лагранжа, проходящий через две, три, четыре,... десять точек. Сколько слагаемых будет в каждом случае, какое количество скобок в числителе и знаменателе?

4.Запишите разделенные разности первого, второго, третьего порядков.

5.Запишите полином Ньютона, проходящий через первые 2, 3, 4 заданные точки, через 2,3,4 последние из заданных точек. Будет ли при этом отличаться результат интерполяции в точке xx?

6.Отличаются ли полиномы Лагранжа и Ньютона, построенные с помощью одного набора точек? Обоснуйте ответ.

7.Каким образом строится кубический сплайн через заданные точки?

8. Чем сплайн отличается от интерполяционного полинома Лагранжа?

Задачи

3.1.1 Экспериментальная зависимость координаты тела, движущегося равноускоренно без начальной скорости, представлена в таблице. С помощью интерполяционного полинома найти значение координаты тела для t=0.2, 0.5

t	0.1	0.3	0.6	0.8	1
x	-0,60	-0,53	-0,33	-0,15	0,15

3.1.2 Экспериментальная зависимость давления воздуха от высоты над землей (при t=0 ^{0}C) представлена в таблице. С помощью интерполяции определить давление воздуха на высоте 5.5 и 10 км.

H, км	1	5.5	11	16.5
P, кПа	100	50	25	12.5

3.1.3 Экспериментальная зависимость плотности воздуха от высоты над землей (при t=0 ^{0}C) представлена в таблице. С помощью интерполяции определить плотность воздуха на высоте 1500м и 6 км.

h ,км	1	2	3	5	7
ρ ,кг/м^3	1,1	1,0	0,9	0,7	0,6

3.1.4 Согласно закону Бернулли динамическое давление потока жидкости меньше статического давления этой жидкости. Зависимость динамического давления жидкости от ее скорости представлена в таблице. С помощью интерполяционного полинома определить давление жидкости при v=6 м/с^2.

V, м/с	2	4	8	10	12
P, кПа	98	91	66	49	30

3.1.5 Плотность керосина при нагревании от 20^{0}C уменьшалась согласно таблице.

Δt, К	10	20	30	50	60	70	80	100
ρ, кг/м^3	792	785	775	760	755	750	740	730

С помощью интерполяционного полинома найти значения плотности при 27^{0}C, 40^{0}C, 63^{0}C.

3.1.6 Зависимость магнитной индукции B от напряженности внешнего магнитного поля H в образце из серого чугуна описывается кривой намагниченности (см. таблицу).
С помощью интерполяционного полинома найти значения магнитной индукции при H=7 кА/м.

H, кА/м	4	8	10	12	15	18	21
B, Тл	0,75	0,9	1	1,05	1,1	1,15	1,2

3.1.7 Электрическое поле ускоряет электроны в лампах, из которых откачан воздух. Скорость, которую приобретает электрон, зависит от ускоряющего напряжения (см. таблицу).

U, В	1	10	100	1000
V, км/с	580	1800	6000	18000

С помощью интерполяции найти значения скорости при U=300 В.
3.1.8 При исследовании затухания звуковых волн, распространяющихся в некоторой среде, получена следующая зависимость интенсивности звука I от длины пути x:

X, м	0.05	0.08	0.11	0.14	0.17
I, пВт/м^2	$2.5*10^{-6}$	$2.7*10^{-7}$	$3.0*10^{-8}$	$3.3*10^{-9}$	$3.6*10^{-10}$

С помощью интерполяции найти I(0.06), I(0.125).

3.1.9 Давление насыщенного водяного пара от температуры изменяется согласно данной таблице. С помощью интерполяционного полинома найти давление при t=6, 7, 18 ^{0}C.

t, ^{0}C	-5	0	5	10	15	20	25
p*10^2, Па	3,96	6,02	8,61	12,1	16,8	23	31,3

3.1.10 Экспериментальная зависимость вязкости глицерина от температуры, показана в таблице:

t,C	-40	-20	0	20	30
η, сантипуаз	$6,71*10^6$	$1,34*10^5$	$1,21*10^4$	$1,49*10^3$	$6,29*10^2$

Методом интерполяции сделать шаг таблицы равномерным.

3.1.11 Источник тока исследовали путем подключения к нему различных резисторов, измерялись сила тока и напряжение на клеммах источника. Получен следующий ряд значений:

I, A	0,06	0,11	0,125	0,16	0,22	0,23	0,27	0,29	0,375
U, B	4,8	4,8	4,4	4,1	4,0	3,3	3,6	3,2	3

С помощью интерполяции найти напряжение при I=0.1, 0.2, 0.3 A.

3.1.12 В лабораторной работе проверялся закон Стефана-Больцмана $R=\sigma T^{n}$. Потребляемая лампой накаливания мощность (следовательно, и излучаемая мощность P=RS) измерялась амперметром и вольтметром, а температура нити- оптическим пирометром. Излучающая площадь нитей накаливания равна 1 $см^2$. При разных токах получено следующее:

t, ^oC	700	900	1100	1200	1300	1500	1600
P, Вт	11	23	47	61	82	120	170

С помощью интерполяции найти мощность при t=800, 1000^{o}C.

3.1.13 В атомной физике используется величина эффективного сечения σ, имеющая смысл площади, на которой атом захватывает γ - квант. Площадь перпендикулярна направлению движения γ-кванта. Экспериментальная кривая, представлена в таблице:

Энергия, Мэв	0.1022	0.1703	0.3405	0.5108	1.0220
σ, A^2	33.28	15.54	9.31	7.64	5.47

Путем интерполяции найти σ для энергий квантов 0.1277 и 0.2554

3.1.14 В таблице приведена зависимость коэффициента теплопроводности циркония от температуры.

T, K	1500	1600	1700	1800	1900
λ 10^4, кал / (см г с)	720	740	750	770	790

С помощью интерполяции найти коэффициент теплопроводности для T = 1620 и T = 1850.

3.1.15 Коэффициент ослабления γ- излучения μ в зависимости от энергии кванта W приведен в таблице. С помощью интерполяционного полинома сделать шаг таблицы равномерным.

W, Мэв	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
свинец μ, $см^{-1}$	11.1	4.43	2.63	1.8	1.0	0.8
вода μ, $см^{-1}$	0.137	0.119	0.106	0.097	0.078	0.028

3.1.16 Температура кипения воды при определенных давлениях приведена в таблице. С помощью интерполяционного полинома сделать шаг таблицы равномерным. Чему равна температура кипения воды при P=1,033 атм ?

P, атм	0.2	0.4	0.7	0.9	1.0	1.5	2.0
t, ^{0}C	59.67	75.42	89.45	96.18	99.09	110.8	119.62

3.1.17 Теплоемкость при постоянном давлении C_p жидкого этилового спирта возрастает при увеличении температуры как показано в таблице. Используя таблицу, определить теплоемкость при температуре T=283 K, 297 K.

t, ^{0}C	-60	-40	-20	0	20	40
C_p, (10^3 Дж/кг·град)	1,59	1,79	1,99	2,20	2,41	2,62

3.1.18 Коэффициент ослабления γ-излучения Co^{60} μ для различных веществ плотности р приведен в таблице. С помощью интерполяционного полинома заполнить пропуски в таблице. Найти коэффициент ослабления для плотности 10.5 и 2.1 кг/$дм^3$.

р, кг/$дм^3$	11,34	7,7	7,4	3,2	2,7	1,7
μ, $см^{-1}$	0,53	0,34	0,3	0,14	0,12	0,075

3.1.19 В таблице приведена плотность воздуха р(кг/$м^3$) в зависимости от давления и температуры. Заполнить пропуски в таблице, интерполируя сначала по давлению, а затем по температуре.

t, ^{0}C	**P, кПа**			
	96	97	98	99
0		1,273	1,25	1,263
2	1,216		1,24	1,253
4	1,207	1,219		1,244
6	1,198	1,211	1,223	
8	1,19	1,214		1.227

3.1.20 Удельная теплота парообразования метилового спирта, как и других жидкостей, обратно пропорциональна температуре. Значения этой величины, полученные экспериментально, приведены в таблице. С помощью интерполяции найдите значение удельной теплоты метилового спирта при 50^oC и 150^oC.

t, ^0C	20	60	100	140	180	200
r, (10^4 Дж/кг)	119	113	103	90.6	74.3	68,8

3.1.21 Сопротивление металлического проводника, как известно, прямо пропорционально температуре. Из данных таблицы с помощью интерполяции найти значение R при $t=13\,^0C$.

t, ^0C	-5	5	10	15	20
R, Ом	48	51	53	54	55

3.1.22 Сопротивление полупроводникового резистора резко уменьшается при увеличении температуры как показано в таблице. С помощью интерполяции найти значение R при $t=100\,^0C$.

T, K	300	400	500	600
R, Ом	6350	350	61	20

3.1.23 Экспериментальная зависимость плотности тока насыщения при термоэлектронной эмиссии с горячего катода в электровакуумном приборе в зависимости от температуры представлена в таблице. С помощью интерполяции найти, при какой температуре T плотность тока J=100мА/м^2.

T, K	1300	1400	1500	1600	1700
J, А/м^2	$7.2*10^{-5}$	$1.0*10^{-3}$	$1.3*10^{-2}$	$8.7*10^{-2}$	$5.5*10^{-1}$

3.1.24 В фотометрии действие света определяется по восприятию его человеческим глазом и характеризуется функцией видности V. Функция видности задана таблицей:

λ, мкм	0.42	0.48	0.50	0.60	0.64
V, лм/В	50	200	550	350	150

С помощью интерполяции найти значение V при $\lambda_0=0.38$ мкм.

3.1.25 Для увеличения предела измерения I_0 амперметра до значения I к нему подключают сопротивление (шунт) $R_ш$. При этом новый предел измерения прибора в эксперименте зависел от $R_ш$ следующим образом:

$R_ш$,Ом	1	2	5	10	15
I , A	6,4	3,6	1,9	1,3	1,2

С помощью интерполяции определить , какой шунт необходимо подключить, чтобы увеличить предел измерения до 1,3 А ?

3.1.26 Для увеличения предела измерения U_0 амперметра до значения U к нему подключают добавочное сопротивление $R_{Д.}$ При этом экспериментально новый предел измерения прибора зависит от добавочного сопротивления следующим образом (см. таблицу). С помощью интерполяции определить, какое добавочное сопротивление необходимо подключить , чтобы увеличить предел измерения до 55 Вт ?

$R_Д$, Ом	1000	2000	3000	4000
U , В	39	50	59	72

3.1.27 Некая отрицательно заряженная частица движется в ускорителе со скоростью v. При этом масса частицы изменяется следующим образом :

V, км/с	$2.4*10^5$	$2.6*10^5$	$2.7*10^5$	$2.9*10^5$
m, кг	$1.5*10^{-30}$	$1.7*10^{-30}$	$2.1*10^{-30}$	$2.9*10^{-30}$

С помощью интерполяции найти массу частицы при v=$2.5*10^5$ км/с.

3.1.28 Известно, что если источник и приемнике звука движутся относительно друг друга, то приемник будет регистрировать длину волны $\lambda_П$,отличную от излучаемой источником $\lambda_и$ (Эффект Доплера). Экспериментальная зависимость регистрируемой длины волны от скорости источника приведены в таблице:

$v_П$, м/с	-10	0	10	20	50
$\lambda_П$, м	0,47	0,48	0,50	0,51	0,58

С помощью интерполяции найти $\lambda_П$, если $v_П$=5 км/ч.

3.1.29 Физическая величина громкость L измеряется в фонах и зависит от звукового давления p. Экспериментальная зависимость представлена в таблице.

p, мкПа	50	100	170	230	270
L, фон	8	14	19	22	23

С помощью интерполяции найти давление, при котором L=20 фон.

3.1.30 В таблице представлена полученная экспериментально таблица зависимости фокусного расстояния линзы от радиуса одной из ее поверхностей. С помощью интерполяции найти F при r_2=7 см.

r_2, см	5	10	15	20
F , см	6.1	9.0	10.4	11.2

3.1.31 На опыте для данного сорта стекла получена зависимость показателя преломления n от длины волны λ (см. таблицу). С помощью интерполяции найти показатель преломления для длины волны 0,37мкм.

λ, мкм	0.22	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n	1.5	1.31	1.23	1.2	1.17	1.16	1.15

3.1.32 Вследствие сильного ионизирующего действия, глубина проникновения α-излучения в вещество мала. Результаты измерения глубины проникновения в зависимости от начальной энергии для воздуха при t=15°C и нормальном давлении приведены в таблице. С помощью интерполяции найдите энергию α-частицы, пролетевшей в воздухе 6 см и 13 см.

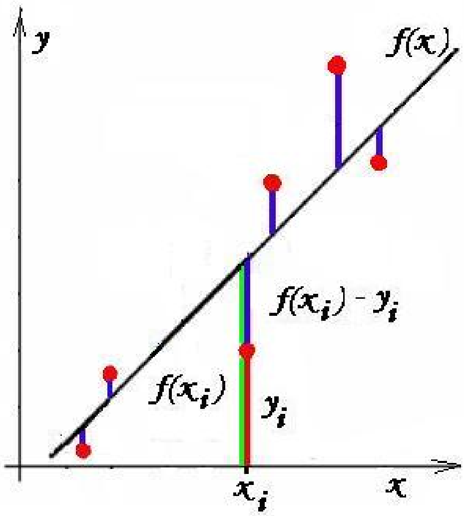
R, см	5	10	15	20	25
W, МэВ	6	9	12	14	17

3.1.33 β- частицы обладают непрерывным энергетическим спектром. Поэтому их характеризуют максимальной глубиной проникновения R_m в вещество. В эксперименте получена зависимость R_m для свинца от максимальной энергии β- частиц W_m. С помощью интерполяции найти R_m для W_m= 0,7 Мэв.

W, МэВ	0,1	0,5	1	1,5	2,5
R, см	0,001	0,015	0,035	0,06	0,105

§3.2. Аппроксимация

Краткая теория



Постановка задачи

В задаче аппроксимации известны координаты точек (x_i, y_i) (i=1..n) и вид функции f(x, a, b,..), которая описывает эту зависимость. Необходимо подобрать параметры a,b,… функции f(x, a, b,..) так, чтобы она наиболее близко проходила около известных точек (x_i, y_i). На рисунке слева красным показаны данные точки. Для каждой точки с номером i можно определить расстояние до линии f(x) как модуль разности между значением функции в этой точке $f(x_i)$ (показано зеленым) и ординатой точки y_i (показана красным). Отрезки длиной $|f(x_i) - y_i|$, показаны на рисунке синим цветом.

Таким образом, характеризовать отклонение данных точек от функции можно с помощью суммы квадратов отклонений:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a, b, ..))^2 .$$

Если параметры a,b,.. функции подобраны наилучшим образом и график функции f(x, a,b,..) наиболее близко проходит около (x_i, y_i), то R, функция параметров, - минимальна. Квадраты берутся для того, чтобы отклонения разного знака (в разные стороны) не компенсировали друг друга.

Линейная аппроксимация

Рассмотрим наиболее простую линейную аппроксимацию, при которой $f(x) = a \cdot x + b$. Для получения минимума функции R, её производные по параметрам a и b приравнивают к нулю, получая систему уравнений для параметров. В этом случае

$$R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b + a \cdot x_i))^2$$

Сумма квадратов отклонений будет минимальна, если

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2\sum (y_i - (a\cdot x_i + b)) = -2\sum (y_i - a\cdot x_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sum (y_i - (a\cdot x_i + b))x_i = -2\sum (y_i x_i - a\cdot x_i^2 - b\cdot x_i) = 0$$

$$\sum y_i x_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a\sum x_i - bn = 0$$

Обозначим

$$M_x = \sum x_i, M_y = \sum y_i, M_{xy} = \sum x_i y_i, M_{xx} = \sum x_i^2$$

Везде суммирование ведется по всем точкам i=1..n. Тогда для определения a и b получается система уравнений :

$$\begin{cases} aM_{xx} + bM_x = M_{xy} \\ aM_x + bn = M_y \end{cases}$$

Выражения для параметров имеют вид:

$$a = \frac{M_{xy}n - M_x M_y}{M_{xx}n - M_x M_x}, \quad b = \frac{M_{xx}M_y - M_x M_{xy}}{M_{xx}n - M_x M_x}$$

Аппроксимация нелинейных функций

Если функция f(x) задана не линейной, а другой зависимостью, то в ряде случаев удается свести задачу к линейной аппроксимации, перейдя к новым переменным и параметрам: x $\to x', y \to y', a \to a', b \to b'$.

Например, для функции $f(x) = \frac{a}{x} + b$, замена

$$x' = 1/x, \quad y' = y, a' = a, b' = b$$

приведет к линейной функции

$f'(x) = a'\cdot x' + b' = a\cdot x' + b$, где параметры a и b можно получить из системы, записанной выше, заменив в ней x на 1/x. Преобразования, необходимые для приведения других функций к линейной, приведены в таблице.

Функция f(x)	x'	y'	a’	b’
$\frac{b}{a+x}$	x	1/y	a/b	$1/b$
$b+\frac{a}{x}$	1/x	y	a	b
$b\cdot e^{a\cdot x}$	x	ln(y)	a	exp(b)
$b\cdot e^{a/x}$	1/x	ln(y)	a	exp(b)

$\dfrac{1}{b+a\cdot\exp(-x)}$	exp(-x)	1/y	a	b
$b+a\cdot\ln(x)$	ln(x)	y	a	b
$b+a\cdot x^n$	x^n	y	a	b

Чтобы вернуться к исходной нелинейной функции, нужно использовать найденные параметры a' и b' для получения значений параметров a и b.

Нелинейный регрессионный анализа

Если нелинейная функция сложным образом зависит от параметров и ее не удается свести к линейной, можно использовать процедуру нелинейного регрессионного анализа. В этом методе для аппроксимирующей функции $F(x,a_1,a_2,..,a_m)$, которая зависит от m неизвестных параметров, используется разложение в ряд Тейлора по параметрам (точнее, по их изменениям $\Delta a_j,\ j=1,2,...,m.$). Это позволяет, приравнивая производные функции $R(a_1,a_2,...,a_m)$ к нулю, получить систему уравнений для $\Delta a_j,\ j=1,2,...,m.$ Коэффициенты этих уравнений зависят от начальных значений параметров функции $a_{10},a_{20},..,a_{m0}$. Решая систему уравнений, получают новые значения параметров, которые можно использовать для записи новой системы и следующего уточнения параметров. Таким образом, в методе нелинейного регрессионного анализа процесс получения наилучший параметров аппроксимирующей функции является итерационным. При этом произвольно (в физических задачах, обычно, из физических соображений) задают начальные значения параметров $a_{10},a_{20},..,a_{m0}$, затем эти значения уточняют до тех пор, пока не получают значения с выбранной точностью ε.

Обозначим

$$F_i = F\left(x_i, a_1,...,a_m\right)\ ; \quad F_{i0} = F\left(x_i, a_{10},...,a_{m0}\right) \quad \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_j}\right|_0 = \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_j}\right|_{x_i,a10,...,am0} ;$$

$$F_i = F_{i0} + \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_1}\right|_0 \left(a_1 - a_{10}\right) + \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_2}\right|_0 \left(a_2 - a_{20}\right) + ... + \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_m}\right|_0 \left(a_m - a_{m0}\right) =$$

$$= F_{i0} + \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_1}\right|_0 \Delta a_1 + \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_2}\right|_0 \Delta a_2 + ... = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_j}\right|_0 \Delta a_j$$

$$\Delta a_j = a_j - a_{j0}$$

Необходимо, чтобы

$$R = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F_{i0} - \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial F_i}{\partial a_j}\right|_0 \Delta a_j \right)^2 \to \min$$

Здесь i - номер точки; j – номер параметра.

При этом частные производные $\left(\frac{\partial R}{\partial a_i}\right)=0$, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - F_{i0} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial a_j}\Big|_0 \Delta a_j \right)\cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_1}\Big|_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial R}{\partial a_m} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - F_{i0} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial a_j}\Big|_0 \Delta a_j \right)\cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_m}\Big|_0 = 0 \end{cases}$$

Имеем m линейных уравнений относительно m неизвестных Δa_j

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\Delta a_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial a_j}\Big|_0 \cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_1}\Big|_0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - F_{i0})\cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_1}\Big|_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{m}\Delta a_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial a_j}\Big|_0 \cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_m}\Big|_0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - F_{i0})\cdot \frac{\partial F_i}{\partial a_m}\Big|_0 \end{cases}$$

После решения системы линейных относительно Δa_j, находятся новые значения параметров: $a_j = a_{j0} + \Delta a_j$

Если

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\Delta a_j}{a_j}\right| < \varepsilon,$$

то считается, что найдены наилучшие значения параметров. Если нет, то $a_{j0} = a_j$, и снова повторяется та же процедура.

Задание

1. Сформировать массивы x1 и y1 данных точек.
2. Если зависимость y1(x1) аппроксимируется нелинейной функцией, подобрать замену переменных, переводящую данную функцию в линейную. С помощью этой замены преобразовать набор данных точек в векторы x и y.

3. Провести линейную аппроксимацию: найти параметры линейной функции a и b. Построить на графике №1 преобразованные данные и эту линейную функцию.
   Рассчитать параметры исходной нелинейной функции и построить на графике №2
   исходные данные и нелинейную аппроксимирующую функцию. Ответить на контрольные вопросы №№1-3.
4. (*) Сформировать вектор F, содержащий аппроксимирующую нелинейную функцию и её производные по параметрам, и вектор vg начальных значений параметров. С помощью функции genfit, выполняющей нелинейный регрессионный анализ, найти значения параметров аппроксимирующей функции. На графике №3 построить исходные данные и нелинейную аппроксимирующую функцию. Ответить на контрольный вопрос №4.
5. (**) Найти значение функции R и показать, что при вычисленных значениях параметров она достигает минимума. Построить графики зависимости R от параметров нелинейной функции. Ответить на контрольный вопрос №5.

Замечание. Правильное и осмысленное выполнение заданий 1-3 оценивается на “удовлетворительно”, заданий 1- 4 – на “хорошо”, заданий 1-5 -на “отлично”.

Указания по выполнению заданий

Пример выполнения задания представлен ниже. Выполняйте свое задание по аналогии. Кроме того:

В задании 2. Рекомендуемые замены переменных для некоторых нелинейных функций приведены выше в таблице. Выбрав нужную замену, преобразуйте исходные данные x1 и y1 в массивы x и y как в примере.

В задании 3. Наклон_линейной аппроксимирующей_функции находится с помощью функции slope, а второй параметр – с помощью функции intercept.

В задании 4. Для того, чтобы воспользоваться функцией genfit, необходимо обозначить совокупность параметров как вектор. В примере этот вектор имеет имя u, элемент u_0 соответствует параметру a, элемент u_1 – параметру b. С учетом этих обозначений аккуратно перепишите аппроксимирующую функцию, найдите ее производные по обоим параметрам и сформируйте вектор-функцию (в примере функция F). параметру

В задании 5. Для вектора F указывается зависимость от некой переменной и вектора параметров (в примере это вектор u). В вектор записывается сверху вниз: сама аппроксимирующая функция, ее производная по первому параметру u_0, ее производная по второму параметру u_1 и т.д.

Вектор P в примере - это вектор найденных с помощью нелинейного регрессионного анализа параметров.

В заданий 6. Постройте сначала зависимость функции R(a,b) от одного параметра, зафиксировав другой. Например, пусть постоянным останется параметр a. Его значение должно быть равно значению, найденному при аппроксимации. Убедитесь, что в результате аппроксимации найден параметр, действительно соответствующий минимуму функции R(a,b). Постройте на том же графике вторую зависимость R(a,b), значение параметра a при этом немного измените. Затем сделайте то же, зафиксировав второй параметр. Можно продемонстрировать зависимость функции R(a,b) от обоих параметров одновременно, построив трехмерный график, как в примере.

Пример

АППРОКСИМАЦИ

$n := 5$ $\quad\quad\quad$ $i := 0..n$

$$x1 := \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.1 \\ 4.1 \\ 6.1 \\ 8.1 \\ 10.1 \end{bmatrix} \qquad y1 := \begin{bmatrix} 5.511 \\ 6.598 \\ 7.524 \\ 9.012 \\ 11.244 \\ 13.428 \end{bmatrix}$$

$t := 1, 1.1..11$

Аппроксимирующая функция
****   F(x)=m*exp(n*x)   ****

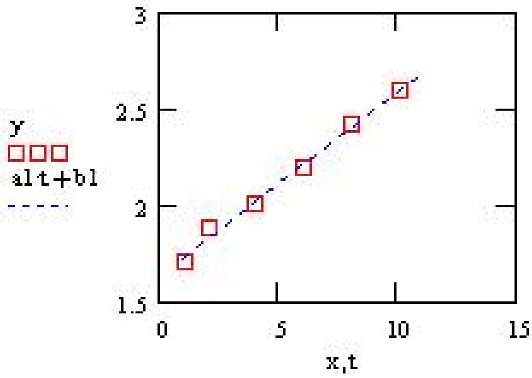
Замена переменных

$x := x1 \qquad y_i := \ln\left(y1_i\right)$

Линейная аппроксимация

$b1 := \mathrm{intercept}(x, y) \qquad b1 = 1.636$

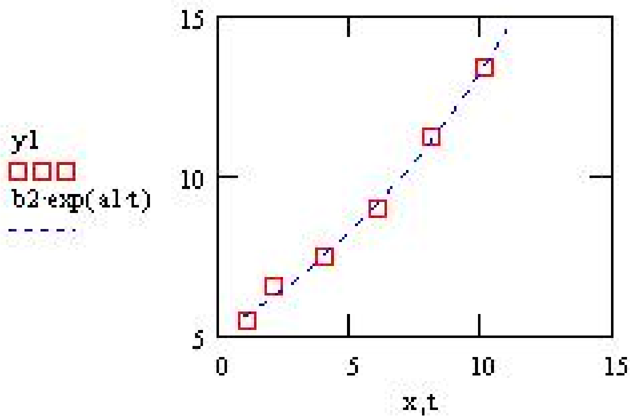
$a1 := \mathrm{slope}(x, y) \qquad a1 = 0.095$



Переход к первоначальным данным

$b2 := \exp(b1)$

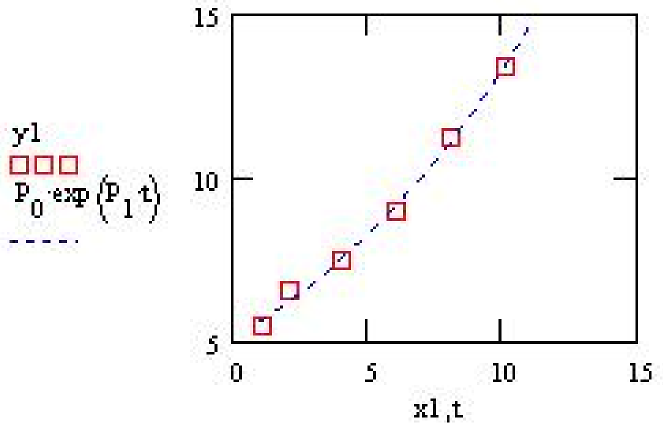
$a1 = 0.095 \qquad b2 = 5.133$



Нелинейная регрессия

$$F(z,u) := \begin{bmatrix} u_0 \cdot \exp(u_1 \cdot z) \\ \exp(u_1 \cdot z) \\ u_0 \cdot z \cdot \exp(u_1 \cdot z) \end{bmatrix} \qquad vg := \begin{bmatrix} 4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

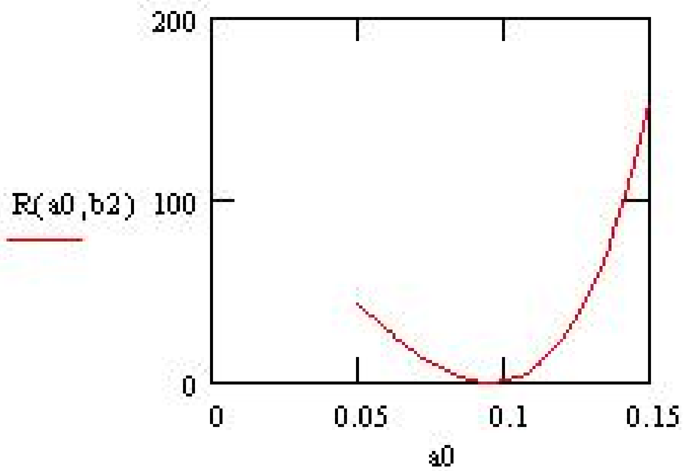
$$P := \mathrm{genfit}(x1, y1, vg, F) \qquad P = \begin{bmatrix} 5.134 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$



Анализ полученных параметров

$$j := 0 .. 10$$

$$R(a,b) := \sum_{j=0}^{n} \left(y1_j - b \cdot \exp\left(a \cdot x1_j\right)\right)^2 \qquad a0 := 0.05, 0.052 .. 0.15$$

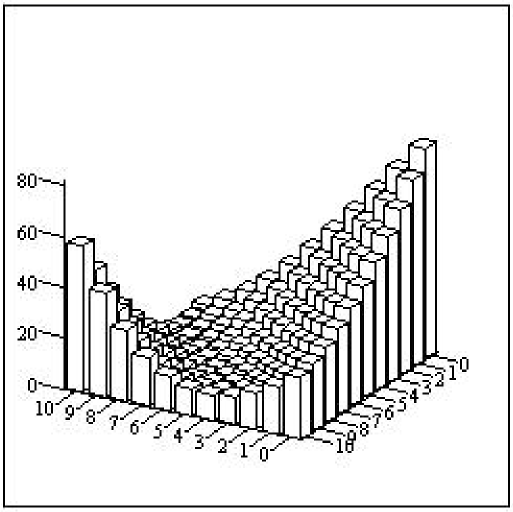


$$a1 = 0.095$$

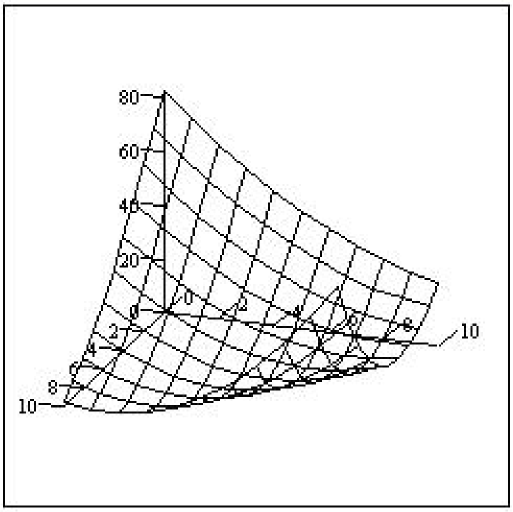
$$b2 = 5.133$$

$i := 0..10 \qquad a0_j := 0.03 + j \cdot 0.006 \qquad b0_j := 5 + j \cdot 0.21$

$D_{i,j} := R\left(a0_i, b0_j\right)$



D



D

Контрольные вопросы

1. Поясните, как данную в Вашей задаче нелинейную аппроксимирующую функцию преобразовать в линейную? Как преобразуются при этом параметры? Используйте обозначения из сформированного Вами документа MathCad.
2. Как теоретически найти параметры a и b линейной аппроксимирующей функции f(x)=a+b·x? Выведите необходимые уравнения.
3. Как найти параметры исходной нелинейной функции, зная a и b?
4. Что такое нелинейный регрессионный анализ? Из каких соображений можно найти параметры нелинейной аппроксимирующей функции? Запишите необходимые уравнения в общем виде и для функции Вашей задачи.
5. Почему линейную аппроксимацию называют методом наименьших квадратов? Почему, по Вашему мнению, часто не совпадают значения параметров, полученные с помощью линейной и нелинейной аппроксимации?

Задачи

3.2.1 Экспериментальная зависимость координаты тела, движущегося равноускоренно без начальной скорости, представлена в таблице задачи 3.1.1. С помощью аппроксимации найти значение начальной координаты и ускорения тела.

3.2.2 Экспериментальная зависимость давления воздуха от высоты над Землей представлена в таблице задачи 3.1.2. Теоретически зависимость атмосферного давления от высоты выражена формулой:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\rho_0 g h / p_0}$$

здесь g-ускорение свободного падения, p_0, ρ_0 - давление и плотность воздуха у поверхности Земли. С помощью аппроксимации найти значение давления у поверхности Земли p_0 и значение коэффициента $k = \dfrac{\rho_0 \cdot g}{p_0}$.

3.2.3 Экспериментальная зависимость плотности воздуха от высоты над Землей представлена в таблице задачи 3.1.3. Теоретически зависимость плотности воздуха от высоты выражена формулой:

$$\rho(h) \quad = k \cdot (1 - m \cdot h)^{4,255}$$

С помощью аппроксимации найти значения коэффициентов k и m.

3.2.4 Уравнение Бернулли для жидкости, текущей на одной высоте, имеет вид:

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0$$

Здесь p, p_0, v –динамическое, статическое давление жидкости и ее скорость, ρ -плотность жидкости. Для данных из задачи 3.1.4 определите статическое давление и плотность жидкости. О какой жидкости, скорее всего, идет речь?

3.2.5 При нагревании плотность жидкости изменяется по закону:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \cdot \Delta t}$$

Где ρ_0 –исходная плотность жидкости, β -коэффициент объемного расширения, Δt –разность температур. Пользуясь данными задачи 3.1.5, найдите ρ_0, β керосина.

3.2.6 Подберите аналитическую зависимость магнитной индукции B от напряженности внешнего магнитного поля H в образце из серого чугуна (см. данные задачи 3.1.6) и найдите наилучшие значения коэффициентов.

3.2.7 Скорость электрона v, движущегося в электрическом поле с разностью потенциалов U равна:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{k + m \cdot U}},$$ где c -скорость света.

С помощью аппроксимации найти значения постоянных k и m.

3.2.8 Интенсивность звука I звуковых волн, распространяющихся в некоторой среде, уменьшается вследствие поглощения в зависимости от длины пути x по закону:

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

С помощью данных задачи 3.1.8, найти интенсивность входящих в среду волн I_0 и коэффициент поглощения звука α, характеризующий степень ослабления звука.

3.2.9 Подберите аналитическую зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры (см. данные задачи 3.1.9). С помощью полученной функции найдите давление при t=6, 7, 18 ^{0}C.

3.2.10 Экспериментальная зависимость вязкости глицерина от температуры, показана в таблице задачи 3.1.10. Теоретически вязкость уменьшается с повышением температуры по экспоненте: $\eta = A \cdot e^{b/T}$, где A и b –эмпирические постоянные, T –абсолютная температура. Найдите значения параметров для глицерина.

3.2.11 Для данных задачи 3.1.11 найти ЭДС и внутреннее сопротивление исследуемого источника тока, ток, проходящий через источник при коротком замыкании. Воспользуйтесь законом Ома для полной цепи.

3.2.12 В лабораторной работе проверялся закон Стефана-Больцмана R=σT^n. Потребляемая лампой накаливания мощность (следовательно, и излучаемая мощность P=RS) измерялась амперметром и вольтметром, а температура нити- оптическим пирометром. Излучающая площадь нитей накаливания была равна 1 см^2. Полученные данные приведены в задаче 3.1.12. Найти σ и n. Выполняется ли закон Стефана-Больцмана (т.е. n = 4)?

3.2.13 В атомной физике используется величина эффективного сечения σ, имеющая смысл площади, на которой атом захватывает γ -квант. Площадь перпендикулярна направлению движения γ -кванта. Экспериментальная кривая, представ-ленная в таблице задачи 3.1.13, приблизительно описывается теоретической зависимостью y = A+B/x . Найти параметры A, B методом наименьших квадратов.

3.2.14 В таблице задачи 3.1.14 приведена зависимость коэффициента теплопроводности циркония от температуры. Предполагается, что λ зависит от T линейно. Найти коэффициенты линейной зависимости.

3.2.15 Коэффициент ослабления γ - излучения μ в зависимости от энергии кванта W приведен в таблице задачи 3.1.15. Известно, что кривая приблизительно описывается теоретической зависимостью: y = A+B/x. Найти параметры A и B.

3.2.16 Температура кипения воды при определенных давлениях приведена в таблице задачи 3.1.16. Подберите аналитическую функцию, хорошо описывающую данную зависимость и найдите ее коэффициенты.
3.2.17 Теплоемкость при постоянном давлении C_p жидкого этилового спирта возрастает при увеличении температуры как показано в таблице задачи 3.1.17. Определить, какая зависимость $C_p \sim T$ или $C_p \sim T^2$ лучше описывает данную кривую.

3.2.18 Коэффициент ослабления γ-излучения Co^{60} μ для различных веществ плотности ρ приведен в таблице задачи 3.1.18. Подберите аналитическую функцию, хорошо описывающую данную зависимость и найдите ее коэффициенты.
3.2.19 Теоретически плотность воздуха должна быть прямо пропорциональна давлению и обратно пропорциональна температуре. В таблице задачи 3.1.19 приведена экспериментальная зависимость плотности воздуха ρ(кг/м^3) от давления и температуры. Проверьте, соответствует ли экспериментальная кривая теоретической и найдите коэффициенты этой зависимости.
3.2.20 Удельная теплота парообразования метилового спирта, как и других жидкостей, обратно пропорциональна температуре. Значения этой величины, полученные экспериментально, приведены в таблице задачи 3.1.20. Определить, какая из зависимостей $\frac{b}{a+x}$ или $b+\frac{a}{x}$ лучше описывает эксперимент.
3.2.21 Сопротивление металлического проводника в зависимости от температуры меняется по закону $R=R_0(1+\alpha t)$, где R_0-сопротивление при температуре 0^0C, α- температурный коэффициент. Из данных задачи 3.1.21 определить R_0, α.

3.2.22 Сопротивление полупроводникового резистора меняется по закону $R_{пп}=R_0$*exp(w/kT), где k- постоянная Больцмана. Из данных задачи 3.1.22 определить параметры R_0 и w.

3.2.23 Экспериментальная зависимость плотности тока насыщения при термоэлектронной эмиссии с горячего катода в электровакуумном приборе в зависимости от температуры представлена в таблице к задаче 3.1.23. Теоретически плотность тока термоэлектронной эмиссии зависит от температуры по закону $J = B*T^2*\exp(-A/kT)$ ($k = 8.63*10^{-5}$ Эв/К). С помощью аппроксимации определить B и A.
3.2.24 В фотометрии действие света определяется по восприятию его человеческим глазом и характеризуется функцией видности V. Функция видности задана таблицей (см. задачу 3.1.24) и описывается

аналитической зависимостью $V = V_0 \cdot \exp(-A \cdot (\lambda - \lambda_0)^2)$. Найти значения V_0 и A, если λ_0=0.53мкм.

3.2.25 Для увеличения предела измерения I_0 амперметра до значения I к нему подключают сопротивление (шунт) $R_ш$. При этом новый предел измерения прибора I= I_0*(R_A/ $R_ш$+1). Найти сопротивление R_A и собственный предел измерений I_0 амперметра.

3.2.26 Для данных из задачи 3.1.26 найти добавочное сопротивление R_D и собственный предел измерений U_0 вольтметра. Теоретически $U = U_0(R_D/R_V + 1)$.

3.2.27 Некая отрицательно заряженная частица движется в ускорителе со скоростью v. Изменение массы частицы в зависимости от скорости представлено в таблице задачи №3.1.27 . Найти массу покоя частицы. Что это за частица ? (m=m_0/$\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

3.2.28 Известно, что если источник и приемник звука движутся относительно друг друга, то приемник будет регистрировать длину волны $\lambda_П$, отличную от излучаемой источником $\lambda_и$ (Эффект Доплера), причем

$$\lambda_П = \lambda_и * \frac{c - v_И}{c - v_П}$$

Здесь $v_И$ и $v_П$ - скорости источника и приемника соответственно, с- скорость звука в вакууме(c=343,6 м/с). Из данных таблицы найти $\lambda_И$, если $v_И$=10 м/с.

3.2.29 Физическая величина громкость L измеряется в фонах и зависит от звукового давления p по закону : L=A*lg(p/p_0). Здесь p_0- стандартное пороговое давление, A- коэффициент. Из данных таблицы задачи 3.1.29 найти A и p_0 .

3.2.30 Линза, в общем случае, ограничена поверхностями с неравными радиусами r_1 и r_2. В этом случае фокусное расстояние рассчитывают по формуле :

$\frac{1}{F} = (n-1) * (1/r_1 + 1/r_2)$, где n- показатель преломления материала линзы. Из данных таблицы задачи 3.1.30 найти n и r_1 .

3.2.31 Теоретическая зависимость показателя преломления n от круговой частоты ω имеет вид: n = $\sqrt{1 + Ne^2/(\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2))}$, где e, m – заряд и масса электрона, N – число электронов в единице объема вещества, ω -

круговая частота, ε_0- электрическая постоянная. Найти длину волны резонанса λ_0.

Указание: приведите данную функцию к виду y=b/(a+x), где $y=n^2-1$, $x=\omega^2$. Тогда $a=\omega_0^2$. Зная круговую частоту, легко найти искомую длину волны.

3.2.32 Глубину проникновения α-излучения в вещество можно рассчитать по эмпирической формуле $R=A\cdot W^m$, где R-глубина проникновения, W-начальная энергия частицы, A и m-параметры. По результатам, приведенным в таблице задачи 3.1.32, найдите значения параметров для воздуха.

3.2.33 Приведенная максимальная глубина проникновения R'_m β- частиц в вещество связана с максимальной энергией W_m этих частиц эмпирической формулой:

$$R'_m = 0.11\cdot(\sqrt{A+B\cdot W^2{}_m}-1)$$

а максимальная глубина проникновения $R_m= R'_m/\rho$ (ρ –плотность поглотителя в г/ см^3).

В эксперименте (см. таблицы в задаче 3.1.33) получена зависимость R_m для свинца от максимальной энергии β- частиц W_m. С помощью аппроксимации получите значения параметров A и B. Совпадают ли они с экспериментальными значениями A=1, B=22.4? Плотность свинца ρ=11,3 г/ см^3.

§3.3. Нелинейные уравнения

Краткая теория

Постановка задачи

Нелинейными называются уравнения, которые можно привести к виду $y(x)=0$, где $y(x)$ –нелинейная функция. Решениями уравнения (корнями) будет набор значений независимой переменной x, которые, при подстановке в уравнение, превращают его в тождество.

Корень x_k называется простым, если производная $y'(x_k) \neq 0$, в противном случае корень называется кратным. Число m называется кратностью корня, если производные $y^{(k)}(x_k) = 0$ для k=1,2,..m-1 и $y^{(m)}(x_k) \neq 0$.

Графическая интерпретация задачи: Построим график функции y(x). Функция равна нулю в точках ее пересечения с осью x. Следовательно, необходимо найти координату x именно этих точек.

Решение нелинейного уравнения проводится в два этапа:

А) Отделение корней;

Б) Уточнение корней.

Под отделением корней понимают нахождение отрезков [a,b] на оси x, внутри каждого из которых имеется один корень. Это можно сделать:

- графически (по графику находятся отрезки, внутри которых функция меняет знак);
- таблично (рассчитывается таблица функции (x_i, y_i) , i=1…n. Определяются пары $[x_i, x_{i+1}]$, где функция меняет знак или близко подходит к нулю).
- аналитически (анализируется производная функции, определяются участки монотонного убывания или возрастания функции, анализируются значения функции на концах этих участков, в точках экстремумов).

Иногда значение корня известно из каких-либо физических соображений.

Уточнение корней - нахождение отделенного корня с некоторой точностью.

Предполагается, что на отрезке [a,b] имеется один корень уравнения $y(x)=0$, который ищется с точностью ε. Обычно ε – небольшое положительное число. Точность считается достигнутой, если найденное на n-том шаге приближение корня x_n

$$|x_{n+1}- x_n| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |y(x_n)|< \varepsilon.$$

Для проверки найденное значение корня подставляется в уравнение.

Некоторые методы уточнения корней.

Метод деления отрезка пополам (дихотомии).

1) Пусть найден отрезок $[a,b]$, на котором существует корень, причем функция на этом отрезке меняет знак. То есть, заданы a,b, такие, что

$$y(a)\cdot y(b)<0.$$

Задана точность ε.

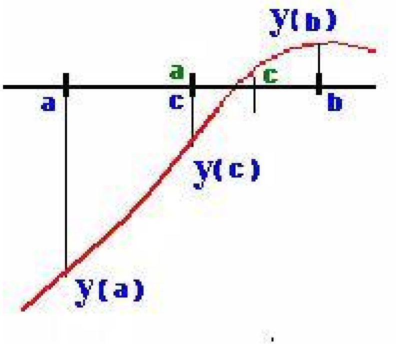
2) За новое приближение корня берется точка $c=\frac{a+b}{2}$, вычисляется $y(c)$.

3) Проверяют, удовлетворяет ли приближение заданной точности.

$$|y(c)|<\varepsilon \quad \text{или} \quad |b-a|<\varepsilon$$

Если да, то заканчивают счет и считают, что корень уравнения равен c (с точностью ε).

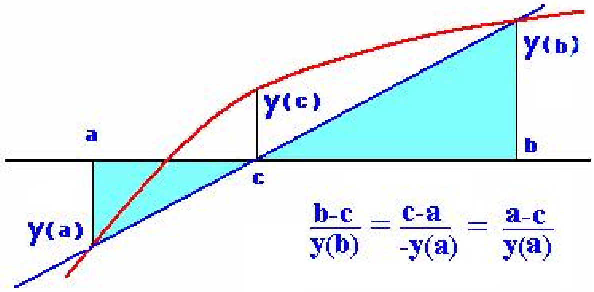
4) Если условие из п.3 неверно, то проверяют, в какой части отрезка [a,b] находится корень. Корень находится на том отрезке, где функция меняет знак. То есть, если $y(c)\cdot y(b)<0$, то корень лежит на отрезке $[b,c]$, то есть $a=c$ (граница отрезка точка a переносится в точку c). Если это условие не выполняется, то корень лежит на отрезке $[a,c]$, то есть $b=c$ (граница отрезка точка b переносится в точку c). Далее переходим к п.2.



На рисунке красная линия - функция y(x). Первоначальный отрезок [a,b] и его середина c помечены соответствующими буквами синего цвета. Новые значения a и c, найденные как описано в п.4 алгоритма, помечены буквами зеленого цвета.

Метод хорд

Процедура метода практически такая же, как в методе дихотомии. Корень находится аналогично, только по-другому вычисляется точка c. Точки (a, y(a)) и (b, y(b)) соединяются отрезком (хордой), новое приближение корня c - пересечение хорды с осью x. Вычислить значение c можно из подобия треугольников, залитых на рисунке голубым цветом. Указанные на рисунки соотношения отражают равенство котангенсов вертикальных углов этих треугольников.

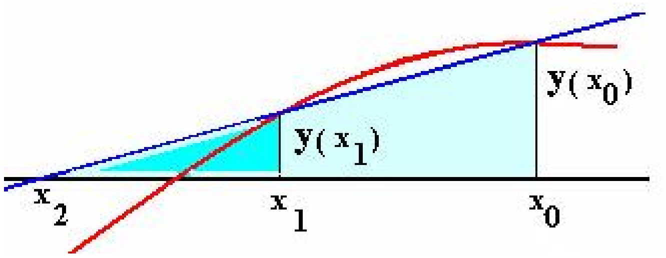


Вначале выбирается такой отрезок [a,b], на котором функция меняет знак: $y(a)\cdot y(b)<0$. Приближенное значение корня :

$$c = a - \frac{(b-a)\cdot y(a)}{y(b)-y(a)}$$

Далее отрезок уменьшают так, чтобы корень оставался внутри: если $y(a)\cdot y(c)<0$, то a=c иначе b=c и т.д., пока | b-a |>ε. При | b-a |<ε, с точностью ε корнем считается x=c .

Метод секущих



В этом методе через точки (x_0, $y(x_0)$) и (x_1, $y(x_1)$) проводится прямая (секущая), которая пересекает ось x в точке x_2. Эта точка является новым приближением корня. В качестве начальных приближений корня x_0 и x_1 можно выбрать концы отрезка [a,b]. Однако, в этом методе x_0 и x_1 могут находиться с одной стороны от корня (как на рисунке). Значение x_2 можно вычислить из подобия вложенных один в другой треугольников, залитых на рисунке голубым цветом. Очередное приближение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})\cdot y(x_n)}{y(x_n)-y(x_{n-1})}$$

Новые приближения корня находятся, пока не будет достигнута выбранная точность, то есть $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. При $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, корнем считается $x=x_{n+1}$ с точностью ε.

Метод Ньютона

В этом методе в точке (x_0, $y(x_0)$) проводится касательная, которая пересекает ось x в точке x_1. За начальное приближение корня x_0 выбирается один из концов отрезка $[a,b]$. Далее

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$

где $y'(x_n)$- производная функции y(x). Новые приближения находятся, пока не достигнута точность ε. При $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, корнем считается $x=x_{n+1}$ с точностью ε.

Задание

1. Описать в документе функцию y(x). Оценить количество корней. На разных интервалах по x построить ее график и таблицу значений x и y(x). Отделить корни.

2. Найти корни уравнения при помощи встроенной функции root(y(x),x). Проверьте правильность каждого решения и оцените его погрешность. Проверьте, зависит ли решение от выбранного начального приближения. Ответить на контрольные вопросы №№ 1-3.

3. Оценить кратность найденных корней.

4. Решить уравнение с помощью блоков Given … Find Given … Minner. Ответить на контрольный вопрос №4.

5. Запрограммировать один из численных методов решения нелинейного уравнения (по выбору преподавателя). Ответить на контрольный вопрос №5.

Замечание. Правильное и осмысленное выполнение заданий 1-2 оценивается на “удовлетворительно”, заданий 1-4 –на “хорошо”, заданий 1-5 -на “отлично”.

Указания по выполнению заданий

В задании 1 . На этапе отделения корней необходимо сделать (и включить в документ) следующие действия:

1.Написать уравнение и привести к виду F(x)=0. Оценить количество корней. Уравнение как текст(!) можно включить в документ.

2. Вывести таблицы x и F(x). По таблицам определите, где функция меняет знак или приближается к оси x. (Таблицу строите, выводя рядом таблицу аргумента и таблицу функции.) Отделить корни.

3. Построить график функции F(x). Проверьте количество корней, по количеству пересечений или касаний оси x.

4. Проверить по графику отделение корней. Еще раз проверьте правильность отделения, если нужно, измените масштаб и разметку на осях. Если значения функции велики, но кажется, что она касается оси, перестройте график в окрестности данной точки, чтобы уточнить, есть ли корень.

В задании 2 .Решение ищется методом итераций. При наличии нескольких корней, будет найдено ближайшее. Решение может быть не найдено (см. пример). В этом случае нужно сменить начальное приближение. Проверьте решение, взяв начальное приближение с другой стороны от корня.

В задании 3. С помощью пакета MathCad найдите y’(x) и ее значения в найденных точках (корнях).

В задании 4. Обратите внимание, что в уравнении нужно набрать не простой, а «жирный» знак равенства сочетанием клавиш Ctrl и =, или выбрав его на панели логических операций. В случае блока Given … Minner численное значение будет найдено даже при отсутствии корня, т.к. ищется не корень, а точка минимального отклонения от нуля.

В задании 5.

Используйте встроенные функции программирования

Контрольные вопросы

1.Что такое нелинейное уравнение? Что является его решением?

2. Что такое отделение корней? Какими методами оно производится?

3. Изложите метод дихотомии (деления отрезка пополам). При каком условии можно применять данный метод? Каким образом прекращается итерационный процесс? Что считается найденным решением?

4. Метод секущих и метод хорд. Сущность методов, их сходство и различия.

5. Метод Ньютона и метод итераций. При каких условиях они применимы?

Пример

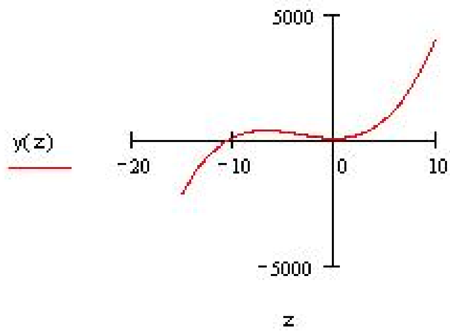
Функция (левая часть уравнения y(x)=0)

$$y(x) := 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100$$

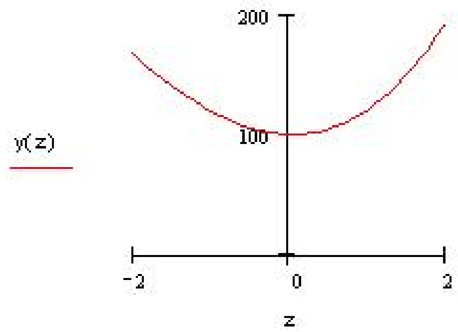
Отделение корней функции

$z := -15, -14.9 .. 10$

Уточняющий график:
(корня возле нуля нет!)



Корень на участке [-15, -5]



Нахождение корня с помощью root

$x := -20$

$xk := root(y(x), x)$ $\qquad xk = -10.545$

$x := 0$

$\boxed{xk1 := root(y(x), x)}$ $\qquad xk1 =$

Can't converge to a solution. Try a different guess value or check that a solution really exists.

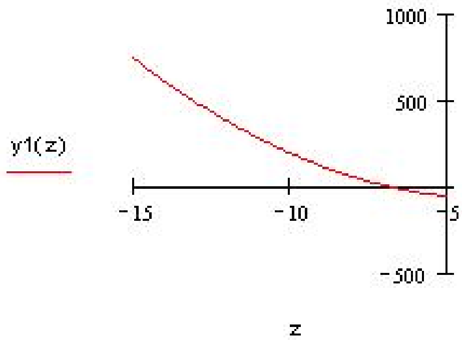
Определение кратности корня

Первая производная функции

$$y1(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$y1(t) \rightarrow 6 \cdot t^2 + 40 \cdot t - 2$$

$$y1(xk) = 243.341$$



корень простой

Решение при помощи Given ... Find

$x := -15$

Given

$y(x) = 0$

$x1 := Find(x)$

$x1 = -10.5445284499$

$ERR = 2.84217094310^{-14}$ $\qquad y(x1) = -2.84217094310^{-14}$

Решение при помощи Given ... Minner

$x := -105$

$TOL := 10^{-5}$

Given

$y(x) = 0$

$x2 := \mathrm{Minerr}(x)$

$x2 = -10.5445284499$

Программирование численного метода

$$ch(c, d) := \left| \begin{array}{l} c \quad \text{if} \quad y(c) \cdot y(d) < 0 \\ d \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$x1 := -15$ $x2 := -5$

$$xk(eps) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow x1 \\ b \leftarrow x2 \\ \text{while} \quad |a - b| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{a + b}{2} \\ a \leftarrow ch(a, c) \\ b \leftarrow ch(b, c) \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

$xk(0.001) = -10.5450439453$

Другой способ

$a_0 := -15$ $b_0 := -5$ $eps := 0.1$

$ch(d, c) := \mathrm{if}(y(c) \cdot y(d) > 0, c, d)$

$n := 0 .. 100$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} := \mathrm{until}\left[\left| y\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right| - \mathrm{eps}, \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \\ \mathrm{ch}\left(b_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \end{bmatrix}\right]$$

$n := \mathrm{last}(a)$ $\qquad$ $n = 11$

$xk2 := \dfrac{a_n + b_n}{2}$ $\qquad$ $xk2 = -10.544$

a =

	0
0	-15
1	-15
2	-12.5
3	-11.25
4	-10.625
5	-10.625
6	-10.625
7	-10.547
8	-10.547
9	-10.547
10	-10.547
11	-10.547

b =

	0
0	-5
1	-10
2	-10
3	-10
4	-10
5	-10.313
6	-10.469
7	-10.469
8	-10.508
9	-10.527
10	-10.537
11	-10.542

Задачи

3.3.1. На дне пруда глубиной h выделяются пузырьки газа диаметром d_1=0.05 мкм. Когда пузырьки поднимутся на поверхность, их диаметр d_2 с учетом поверхностного натяжения можно найти, решая уравнение

$$(p_0+\rho\cdot g\cdot h+4\sigma/d_1)d_1^3=(\rho_0+4\sigma/d_2)d_2^3$$

p_0-атмосферное давление, поверхностное натяжение воды $\sigma=73\cdot 10^{-3}$ Н/м. Найти диаметр пузырьков на поверхности воды.

3.3.2. Определить глубину погружения деревянного шара радиуса R=20 см, плавающего в воде. Плотность дерева $\rho=0.75$ г/см^3. Объем сегмента шара высотой $h<R$: $V_s=\pi\cdot h^2(R-h/3)$.

3.3.3. На воду опущен цилиндр радиуса R, длиной L , изготовленной из вещества плотностью ρ ($\rho<1$).Ось цилиндра параллельна поверхности воды. Найти расстояние от оси цилиндра до поверхности.

3.3.4. В воду опущен конус вершиной вверх, радиус основания R, высота H, изготовленной из вещества плотностью ρ ($\rho<1$).Найти расстояние x от вершины конуса до поверхности воды. Когда равновесие будет устойчивым?

3.3.5. С какой максимальной скоростью тепловоз, развивающий силу тяги 250 КН, может равномерно вести состав массой 20 т? Сила сопротивления воздуха $F_т=A*v+B*v^3$, где v- скорость движения. Коэффициенты $A=10^4$ кг/с, B=30 кг/с*м^2. Коэффициент трения колес о рельсы 0.002. Исследовать, как будет меняться скорость при изменении силы тяги и коэффициентов A,B.

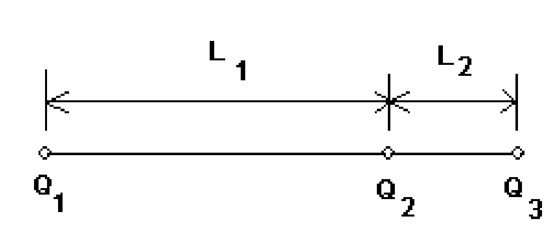
3.3.6. Колесо массой 1 кг, распределенной по ободу радиусом 0.35 м, вращается равномерно с угловой скоростью ω и тормозится трением в оси. Момент тормозящих сил $M_{тр}=-a\omega-b\omega^3$, где $a=2.8*10^{-2}$ Н м с , $b=9.1*10^{-4}$ Н м с^3 . К ободу колеса по касательной приложена постоянная сила F=5 Н . С какой угловой скоростью вращается колесо?

3.3.7. По длинной тонкостенной трубе радиуса r=1 см, покрытой цилиндрическим тепло- изолирующим слоем, течет горячая вода. Теплопроводность изолирующего слоя $æ=6*10^{-4}$ кал/(с·см·град), коэффициент теплообмена трубы с изолирующим слоем $\alpha=5*10^{-4}$ кал/(с·град). Найти, при каком радиусе изоляции R потери тепла уменьшается в n раз по сравнению с потерями для трубы без изоляции. R находится из уравнения

$$1/R+(\alpha\ /\ æ)\ \ln(R/r)=n/r$$

3.3.8. Незаряженный мыльный пузырь имел радиус $R_0=5$ см. Затем его зарядили зарядом Q. Найти новый радиус пузыря R, если сила давления пропорциональна $1/R^3$, сила поверхностного натяжения равна 2q/R (q=70 дин/см), сила электростатического отталкивания зарядов равна $Q^2/(8\pi*R^4)$, а при равновесии сумма сил равна нулю.

3.3.9. На прямой находятся 3 положительных заряда Q_1,Q_2,Q_3. Расстояние от Q_1 до Q_2 равно L_1, от Q_2 до Q_3 -равно L_2. Найти расстояние от заряда Q_1 до точки на прямой, в которой равнодействующая сил отталкивания зарядами Q_1, Q_2, Q_3 некоторого четвертого заряда Q_4 равна нулю.



3.3.10. Последовательно соединены резистор из металлической проволоки и полупро-водниковый резистор. Температурные зависимости их сопротивлений:

$R_м=R_{0м}\alpha T$; $R_п=R_{0п}exp(W/(kT))$, где $R_{0м}$=125 Ом, $R_{0п}=5.86\cdot10^{-2}$ Ом; $\acute{\alpha}=4\cdot10^{-3}$ $К^{-1}$; $W=4.8\cdot10^{-20}$ Дж. Определить, при какой температуре величина сопротивления последовательно соединенных резисторов будет минимальной.

3.3.11. Найдите температуру, при которой параллельное сопротивление резисторов из

задачи 3.3.10. будет иметь максимальное сопротивление.

3.3.12. Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии из горячего катода в электровакуумном приборе меняется по закону:

$j_n=B\cdot Texp(-A/(kT))$,

где энергия активации А=4эВ, $B=1.3\cdot\ 10^5$ $А/м^2\cdot К$. Найдите температуру, при которой плотность тока j_n=100 $мА/м^2$.

3.3.13. Найти процентное содержание углекислого газа x в реакции

$2\ CO+O_2$<-->$2CO_2$,

которое определяется уравнением

$(p/k^2-1)x^3+3x-2=0$,

где p- давление, k=1.648- константа равновесия реакции.

3.3.14. Найти напряжение на туннельном диоде из решения уравнения

$$\frac{E-U}{R}-I(U)=0$$

где $I(U)=A\cdot U\cdot e^{-\alpha\cdot U}+D\cdot\left(e^{\beta\cdot U}-1\right)$ - вольтамперная характеристика туннельного диода. A=0.2718 $Ом^{-1}$, α=10 $В^{-1}$, $D=10^{-8}$ A, β=20 $В^{-1}$, E=1 В, R=125 Ом.

3.3.15. Температуру можно измерять с помощью медь-константовой термопары. Напряжение на концах термопары зависит от разности температур на ее концах:

$$\Delta T=-0.004U^6-0.054U^5-0.276U^4-0.564U^3-1.5U^2+25.7U+273.13$$

Найти, какое напряжение соответствует разности температур 300K.

3.3.16. Индуктивность L (в нГн) отрезка провода прямоуголь-ного сечения длиной x, шириной b=0.1 см, толщиной t=0.001 см вычисляется как:

$$L=2x\left(\ln\frac{2x}{b+t}+0.447\frac{t+b}{2x}+\frac{1}{2}\right)$$

Найти длину провода, индуктивность которого равна L=7 нГн.

3.3.17. Индуктивность L (в нГн) однослойной катушки круглого сечения с радиусом R и длиной x вычисляется по формуле:

$$L = 4\pi w^2 R\left(\ln\left(1+\frac{\pi}{x/R}\right)+\frac{1}{2.3+1.6x/R+0.44(x/R)^2}\right)$$

где частота тока w=50 гц. Определить, при какой длине x катушка с радиусом R=1 см имеет индуктивность L=1.5 мкГн.

3.3.18. Индуктивность L (в нГн) одиночного круглого витка диаметром D и диаметром провода d

$$L = 2\pi D\left(\ln\frac{8D}{d}-1.75\right)$$

Найти диаметр витка, индуктивность которого L=40 нГн, если d=0,1 см.

3.3.19. Емкость конденсатора, состоящего из двух шаров диаметром D=10 см в диэлектрической среде с ε=1, определяется по формуле:

$$C = 0.278\varepsilon D\left(1+\frac{D\left(4a^2-D^2\right)}{2a\left(4a^2-2aD-D^2\right)}\right)$$

где a- расстояние между центрами шаров (a>D).C измеряется в пФ, а D-в см. Найти величину a, при которой емкость будет 5 пф.

3.3.20. Взаимная индуктивность двух тонких проводов длиной L, расположенных параллельно на расстоянии h равна

$$M = 2L\left(arsh\frac{L}{h}+\frac{h}{L}-\sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2+1}\right),$$ где arsh(x) - функция, обратная гиперболическому синусу (в пакете MathCad обозначается asinh(z)). Для L=10 см найти расстояние, на котором взаимная индуктивность проводов M=42 нГн.

3.3.21. Уравнение состояния реального газа Ван-дер Вальса имеет вид:

$(P+a/V^2)(V-b)=RT$

a ,b-параметры, R=0.083 л·атм/(моль·К), P- давление газа в атмосферах,V-молярный объем газа в литрах, T-температура газа в Кельвинах, параметры a, b приведены в таблице 3.1. При $T>T_0=8a/(27R*b)$ уравнение имеет один действительный корень V. При заданных T=700 K,P=5.6 атм. определить T_0 и V для одного из газов.

Таблица 3.1

Газ	a, атм $*л^2/моль^2$	b, л/моль

Гелий	0.034	0,0237
Водород	0.24	0,0266
Азот	1.39	0,0391
Кислород	1.36	0,0318
CO_2	3.6	0,0427

3.3.22. При температуре $T<T_0=8a/(27R*b)$ зависимость P(V) представляет собой кубическую параболу, а уравнение P(V) – P=0 имеет три корня V_1,V_2,V_3. В действительности точки V_1 и V_3 на изотерме соединены отрезком прямой, где наблюдается фазовый переход жидкости в газ и обратно. Причем V_1-объем жидкости, а V_3 -объем газа. В таблице 3.2 представлена температура кипения сжиженного газа при нормальном давлении (P=1 атм). Для температуры чуть ниже температуры кипения, в интервале V=0.03-18 л определить значения V_1,V_3 . Уравнение получить, используя уравнение Ван-дер-Ваальса из задачи 3.3.21.

Таблица 3.2

Газ	Температура кипения, К
Гелий	4,2
Водород	20,4
Азот	77,3
Кислород	90,2
CO_2	194,7

3.3.23. Состояния реального газа, наряду с уравнением Ван-дер-Вальса, можно описывать уравнением Бертло:

$$(P+a/(TV^2))(V-b)=RT$$

a ,b-параметры, R=0.083 л·атм /(моль·К),P- давление газа в атмосферах , V-молярный объем газа в литрах,T- температура газа в кельвинах. Найти объем моля газа V при нормальных условиях.

Параметры a, b приведены в таблице 3.3

Таблица 3.3

Газ	a, л·атм /моль^2	b, л/моль

Гелий	0.174	0,0237
Водород	7.776	0,0266
Азот	173.2	0,0391
Кислород	207.5	0,0318
CO_2	1086	0,0427

3.3.24. Состояние реального газа можно описывать 1-м уравнением Дитеричи:

$$P(V-b)=RT\exp(-a/(RTV))$$

a,b-параметры,R=0.083 л атм/(моль К), P-давление газа в атмосферах,V-молярный объем газа в литрах,T- температура газа в кельвинах.

Найти объем моля газа V при нормальных условиях . Параметры a, b имеются в таблице 3.4

Таблица 3.4

Газ	1-е уравнение Диттеричи		2-е уравнение Диттеричи	
	a, $л^2 \cdot атм/моль^2$	b, л/моль	a, $атм \cdot (л/моль)^{5/3}$	b, л/моль
Гелий	$8.36 \cdot 10^4$	35.5	$1.09 \cdot 10^4$	17.77
Водород	$5.93 \cdot 10^4$	39.9	$7.45 \cdot 10^4$	19.95
Азот	$3.39 \cdot 10^6$	58.5	$3.75 \cdot 10^5$	29.25
Кислород	$3.35 \cdot 10^6$	47.7	$3.97 \cdot 10^5$	23.85
CO_2	$8.87 \cdot 10^6$	64.0	$9.53 \cdot 10^5$	32.0

3.3.25 Состояние реального газа можно описывать 2-м уравнением Дитеричи:

$$\left(P+\frac{a}{V^{5/3}}\right)(V-b)=R\cdot T$$

a,b-параметры,R=0.083 л·атм/(моль·К), P-давление газа в атмосферах,V-молярный объем газа в литрах,T- температура газа в Кельвинах. Найти объем моля газа V при нормальных условиях. Параметры a, b приведены в таблице 3.5.

3.3.26. По известному давлению и температуре найти объем реального газа при нормальных условиях, используя уравнение состояния Битти-Бриджмена:

$$P=RT/V+Q/V^2+S/V^3+U/V^4,$$

где $Q=RTB_0-A_0-R\cdot c/T^2$, $S=RTB_0b+A_0\cdot a-R_0B_0/T^2$, $U=RB_0b\cdot c/T^2$.

Для метана A_0=2.2769, B_0=0.05587, a=0.01855, b=0.01587,c=$1.283\cdot 10^4$. Давление измеряется в атмосферах, объем – в литрах ,T- в Кельвинах.

3.3.27. Мощность излучения длиной волны λ с единицы поверхности абсолютно черного тела определяется законом Планка:

$$Q = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}$$

при заданной температуре найти длину волны, при которой мощность излучения максимальна. Проверить закон смещения Вина : λ_{max} T=const для T=100..700 К.

Указание: Максимум мощности излучения при данных T находится около λ=5 мкм.

3.3.28. Постройте график зависимости скорости равномерного движения лодки от средней силы тяги , развиваемой гребцами, если сила вязкого трения $F_т = A \cdot v + B \cdot v^3$, v- скорость движения. Коэффициенты A=40 кг/с, B=32 кг/с*м^2.

3.3.29. Колесо радиусом 0.5 м, вращается равномерно с угловой скоростью ω и тормозится трением в оси. Момент тормозящих сил $M_{тр} = -a \cdot \omega - b \cdot \omega^3$, где $a = 2.8 \cdot 10^{-2}$ Н· м ·с , $b = 9.1 \cdot 10^{-4}$ Н·м·с^3 . К ободу колеса по касательной приложена постоянная сила F. Построить график зависимости линейной скорости равномерного вращения колеса от силы, приложенной по касательной к ободу.

3.3.30. С помощью уравнения Ван-дер-Вальса (см. задачу 3.3.21.) найти сжимаемость реального газа Z=PV/RT, как функцию давления. Нарисовать кривые сжимаемости при разных температурах (при T=500 и 700K).

3.3.31. С помощью уравнения Ван-дер-Вальса (см. задачу 3.3.21.) рассчитать летучесть реального газа f

$$\lg(f/P) = \frac{1}{RT}\int_0^P \left(V - \frac{RT}{P}\right) dP$$

при нормальных условиях для одного из газов таблицы 3.5.

Указание: Рассчитайте интеграл численно, например, методом трапеций. Для этого сначала найдите набор значений V_n для давлений P_n, изменяющихся с шагом h ($P_0 \neq 0$). Исследуйте зависимость величины интеграла от P_0 и числа разбиений.

3.3.32 На плоскости на расстоянии R друг от друга находятся заряды $q_1 = +4q$ и $q_2 = +q$.Построить несколько эквипотенциальных поверхностей этой системы.

См.указание к задаче 3.3.33.

Таблица 3.5

Газ	a, атм *л^2/моль^2	b, л /моль
бензол ксенон	18.00 4.194	0.011 0.051

3.3.33. На плоскости на расстоянии друг от друга находятся заряды q_1=+4q и q_2=-q. Построить несколько эквипотенциальных поверхностей этой системы.

Указание: Перейти к полярной системе координат. Для фиксированного набора углов α определить из решения нелинейного уравнения значение r , при котором потенциал φ будет иметь заданное значение.

§3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Краткая теория

Постановка задачи

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения вида $F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})=0$

Где $y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dt^n}$ - производная n-того порядка· Порядком ОДУ называется номер старшей производной, входящей в это уравнение.

Общим решением этих уравнений является семейство функций

$$y=y(x,C_1, C_2,\ldots).$$

Константы C_1, C_2,… определяются из дополнительных условий, налагаемых на функцию y(x) и ее производные. Число дополнительных условий равно порядку ОДУ. Вычисляя из дополнительных данных значения $C_1, C_2, C_3,\ldots,C_n$ из общего решения получим частное решение.

Если все дополнительные условия заданы в одной точке x, то они называются начальными, а совокупность ОДУ с начальными условиями – задачей Коши.

$$y(x_0)=y_0$$

$$y'(x_0)=z_1$$

………

$$y^{(n-1)}(x_0)=z_{n-1}$$

Если дополнительные условия заданы в разных точках x, то они называются граничными, а совокупность ОДУ с граничными условиями – краевой задачей. Например, дополнительные условия могут представлять собой значения искомой функции в разных точках:

$$y(x_0)=y_0$$

$$y(x_1)=y_1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y(x_{n-1})=y_{n-1},$$

Дополнительные условия могут содержать и значения производных в некоторых точках.

Для численного решения ОДУ разработано много так называемых разностных схем. В них ОДУ заменяется алгебраическими уравнениями для функции $y(x,C_1, C_2,\ldots)$ в некоторых точках x_i. Обычно, для применения этих схем необходимо ОДУ разрешить относительно старшей производной. Для ОДУ первого порядка F(x, y, y')=0, перейдем к виду y'= F(x, y).

Например,

(1) y'+3y=0 с начальным условием y(0)=4

переписывается в виде

(2) y'=-3y.

Для ОДУ второго порядка F(x, y, y',y")=0 – к виду y"= F(x, y, y').

Например:

(3) y"+y'+y-2x=0

с начальными условиями y(0)=1; y'(0)=3 переписывается в виде

y"=-y'-y+2x

и с помощью замены переменной z=y' представляется в виде системы двух ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -z - y + 2x \end{cases}$$

Для численного решения область непрерывного изменения аргумента x заменяют дискретным множеством точек, то есть вводят сетку. Независимая переменная берется в определенных точках (узлах) x_0, x_1, $x_2,\ldots,x_m$, находящихся на расстоянии h друг от друга. Искомая функция ищется только в этих узлах, получают значения y_0, y_1, $y_2,\ldots,y_m$. Она называется сеточной функцией.

Затем производные приближенно записывают через x_0, x_1, $x_2,\ldots,x_m$, y_0, y_1, $y_2,\ldots,y_m$ и подставляют в исходное уравнение. В результате получаются уравнения для определения значений функции, в общем случае нелинейные. Такие методы счёта называются разностными схемами. При этом дифференциальные уравнения сводятся к алгебраическим, которые называются разностными уравнениями.

Схема называется устойчивой, если при малом изменении начальных (граничных) условий решение так же меняется мало.

Схема называется корректной, если решение существует и единственно при любых начальных (граничных) условия.

Схема явная, если для нахождения y_i требуется знать значения функции в предыдущих точках. В противном случае, схема является неявной.

Некоторые численные методы решения ОДУ.

Метод Эйлера.

Запишем для искомой функции ряд Тейлора, сохраняя в разложении первую производную:

$y(x_i+h)=y(x_i)+y'(x_i)\cdot h+\ldots$ далее ряд обрываем.

Обозначим: $x_{i+1}=x_i+h$

$y(x_i+h)=y(x_{i+1})=y_{i+1}$

$y(x_i)=y_i$

По условию

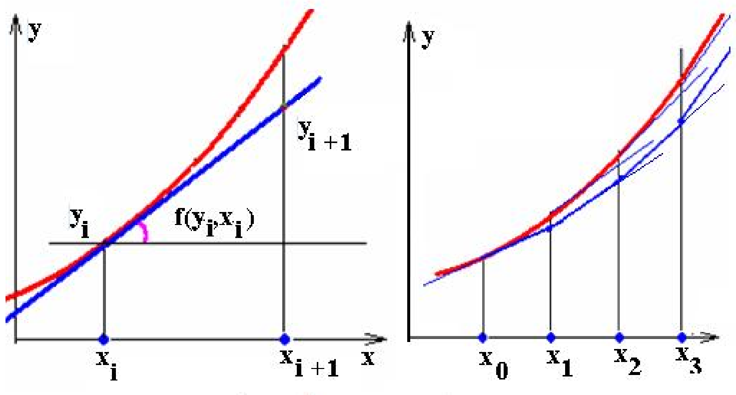
$y'(xi)=f(yi, xi)$

Тогда:

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(y_i, x_i) \qquad (4)$$

$$x_{i+1}=x_i+h\ , \qquad i=0,1,2,3,\ldots$$

Причем, $y_0=y(x_0)$ известно из начального условия.



Получается рекуррентная формула для нахождения сеточной функции по методу Эйлера или разностная схема метода Эйлера.

Геометрическая интерпретация метода Эйлера очень проста. На рисунках красная линия представляет собой функцию – частное решение ОДУ. Приближенное решение в точке x_{i+1} находится с помощью касательной, построенной в точке x_i, тангенс угла наклона которой равен производной - правой части ОДУ. Приближенное решение y_{i+1} находится из треугольника, показанного на левом рисунке, при этом возникает ошибка. Рисунок справа демонстрирует, почему метод Эйлера называют «методом ломаных» и нарастание ошибки в процессе применения этой схемы. Ошибка пропорциональна шагу h^2 и уменьшается при уменьшении шага.

Модифицированный метод Эйлера.

Чтобы уменьшить ошибку счета в разложении в ряд Тейлора сохраняют 2-ю производную.

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h * y'(x_i) + \frac{h^2}{2} * y''(x_i) + \ldots$$

или

$$y_{i+1} = y_i + h * y_i' + \frac{h^2}{2} * y_i''$$

$y_i' = f(x_i, y_i)$ - по виду уравнения.

Вторую производную выражают через первую:

$$y_i'' = \frac{y'(x_i + h) - y'(t_i)}{h} = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h}$$

$y_{i+1}' = f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Функция $f(x_i, y_i)$ в общем виде нелинейная и нельзя из уравнения выразить y_{i+1}.

Поэтому полагают:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_{i+1}, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))$$

Подставляя эти выражения в ряд Тейлора, получим разностную схему модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \times \left[f(x_{i+1}, y_i + h \times f(x_i, y_i)) + f(x_i, y_i) \right]$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Уменьшается ошибка, но при этом функция на каждом шаге вычисляется 2 раза. Ошибка метода $\delta \approx h^3$

Метод Рунге-Кутта.

Применяется при решении ОДУ наиболее часто, так дает хорошую точность.

Если оставить в разложении в ряд слагаемые более высоких порядков, вплоть до слагаемых ~h^4

$$y_{i+1} = y_i + h \times y_i' + \frac{1}{2} h^2 \times y_i'' + \frac{1}{6} h^3 \times y_i^{(3)} + \frac{1}{24} h^4 \times y_i^{(4)} ..$$

Точно также, как и в модифицированном методе Эйлера, производные можно заменить разностями.

Запишем схему метода без вывода:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \times k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \times k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h \times k_3)$$

Ошибка метода ~h^5. Но на каждом шаге функцию, стоящую в правой части, приходится вычислять 4 раза.

Задание

1.Проанализировав условие задачи, запишите ОДУ и дополнительные условия в соответствии с порядком уравнения.

Разрешите уравнение относительно старшей производной.

2.Решите уравнение (систему уравнений) с помощью функции rkfixed. Постройте график функции, которая является решением ОДУ. Найдите ее значение или значение аргумента, которые нужно найти по условию задачи. Ответьте на контрольные вопросы 1-5.

3.Найдите решение ОДУ аналитически. В большинстве случаев для этого необходимо разделить переменные и проинтегрировать с помощью MathCad. Если уравнение не решается методом разделения переменных, определите, к какому типу оно относится, и найдите аналитическое решение одним из методов, описанных в курсе дифференциальных уравнений. Найдите решение в виде аналитической функции и постройте её график. Найдите значение функции или аргумента, которые нужно найти по условию задачи. Сравните численное и аналитическое решения. Изучите, как зависит точность численного решения от шага интегрирования. Ответьте на контрольный вопрос 6.

4.Решите ОДУ с помощью численной схемы метода Эйлера или модифицированного метода Эйлера. Контрольный вопрос 7.

Указания по выполнению заданий

В задачах о вытекании воды через малое отверстие, скорость вытекания жидкости (то есть, объем воды, вытекающий через единичную площадь за единицу времени) равна $v = 0.6\sqrt{2gh}$ м^3/(м^{2}сек), где h- высота столба жидкости над отверстием.

В задании 1. Записав ОДУ, определите, какая функция является его решением, каковы начальные условия, в каких пределах должен изменяться аргумент.

В задании 2. Начальное значение искомой функции запишите в переменную y0 (для ОДУ первого порядка) или в вектор (для системы уравнений). См. пример.

Разрешите ОДУ относительно производной, т.е. приведите к виду y'=f(x,y). Полученную функцию f(x,y) впишите в документ в виде D(x,y):= f(x,y0). Если уравнение второго порядка, его нужно разрешить для старшей производной, применить подстановку y'=z и записать систему ОДУ первого порядка. Начальные условия как и функция D(x,y) записываются в виде вектора.

Решение производится с помощью функции rkfixed(y,xнач,xкон,N,D). Здесь y -имя искомой функции, xнач,xкон начальное и конечное значения независимой переменной, N –число точек на интервале [xнач,xкон],D – вектор правых частей ОДУ.

В задании 3. Разделите переменные и проинтегрируйте. Интегрирование произведите, используя символьные вычисления, необходимая для этого «стрелка направо» набирается одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «.» Подставте пределы интегрирования (в примере для y пределы от 4 до y; а для x от 0 до 2) и выразите искомую функцию.Для этого напишите уравнение с «жирным» знаком равенства (набирается одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «+»), выделите курсором переменную, относительно которой нужно разрешить уравнение (в примере это переменная y) и выберите пункты меню Символьные вычисления/Переменная/Решить. Затем определите функцию, соответствующую полученному решению (в примере это функция f(x)). Постройте на одном графике численное и аналитическое решение. Найдите аналитически значение функции или аргумента, которые нужно найти по условию задачи.

В задании 4. В примере показано нахождение решения ОДУ по схеме Рунге-Кутта. Другие схемы программируются аналогично.

Контрольные вопросы.

1. Что является решением обыкновенного дифференциального уравнения?
2. Чем определяется порядок ОДУ? Запишите ОДУ 1-го порядка в общем виде. Приведите пример ОДУ 1-го порядка. Чем отличаются общее и частное решение ОДУ?
3. Запишите ОДУ 2-го порядка в общем виде. Приведите пример ОДУ 2-го порядка.
4. Что такое задача Коши? Сколько и каких дополнительных условий нужно для ее решения?
5. Записать схему Эйлера для ОДУ 1-го или 2-го порядка.

6. Записать схему модифицированного метода Эйлера для ОДУ 1-го или 2-го порядка.

7. Записать схему метода Рунге-Кутта для ОДУ 1-го порядка.

Пример

Задача 3.4. #

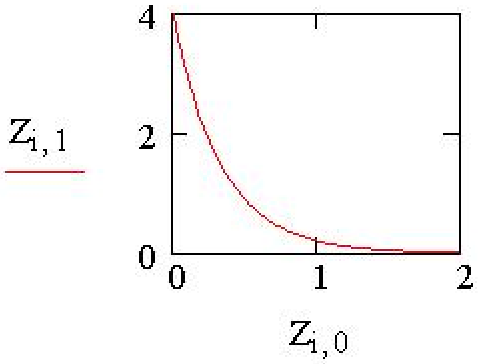
***** ОДУ 1-го порядка *****

***** y'+3y=0 начальное условие y(0)=4 *****

$y_0 := 4 \qquad i := 0..100$

$D(x,y) := -3 \cdot y_0$

$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 2, 100, D)$



$Z_{100,0} = 2 \qquad Z_{100,1} = 9.915 \times 10^{-3}$

******** Аналитическое решение *********

$$\int \frac{-1}{3 \cdot y}\, dy \rightarrow \frac{-1}{3} \cdot \ln(y)$$

$$\int 1\, dx \rightarrow x$$

Приравниваем первообразные , подставляя пределы (4,y) и (0,x)

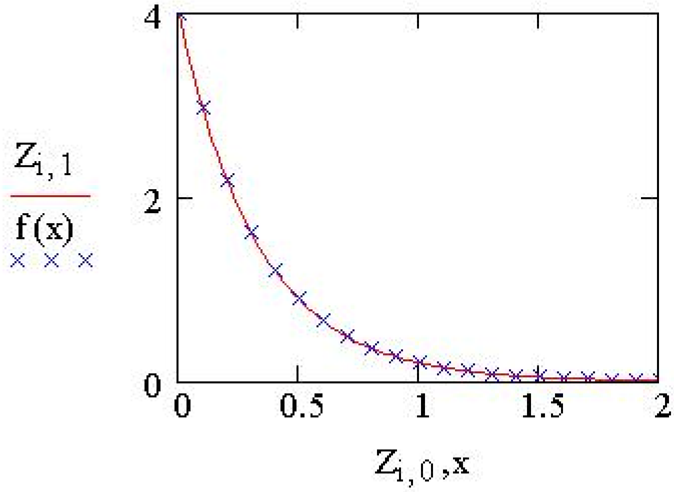
$$\frac{-1}{3} \cdot \ln(y) + \frac{1}{3} \cdot \ln(4) = x$$

$$\frac{4}{\exp(3 \cdot x)}$$

$$f(x) := \frac{4}{\exp(3 \cdot x)} \qquad f(2) = 9.915 \times 10^{-3}$$

**** Сравниваем численное и аналитическое решения ****

$$x := 0, 0.2 .. 2$$



**** Схема Рунге - Кутта ****

$N := 30 \quad j := 0..N$

$f(z) := -3 \cdot z$

$h := \frac{2-0}{N}$

$x_0 := 0 \qquad y_0 := 4$

$k1(z) := h \cdot f(z)$

$k2(z) := h \cdot f\left(z + \frac{k1(z)}{2}\right)$

$k3(z) := h \cdot f\left(z + \frac{k2(z)}{2}\right)$

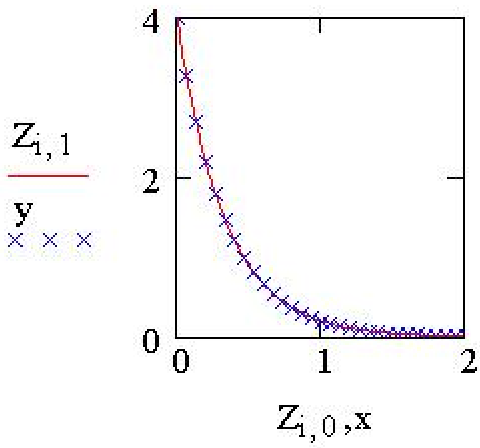
$k4(z) := h \cdot f(z + k3(z))$

$x_{j+1} := x_j + h$

$$y_{j+1} := y_j + \frac{1}{6} \cdot \left(k1\left(y_j\right) + 2 \cdot k2\left(y_j\right) + 2 \cdot k3\left(y_j\right) + k4\left(y_j\right)\right)$$

$x_N = 2$

$y_N = 9.916 \times 10^{-3}$



**** ОДУ 2-го порядка ****

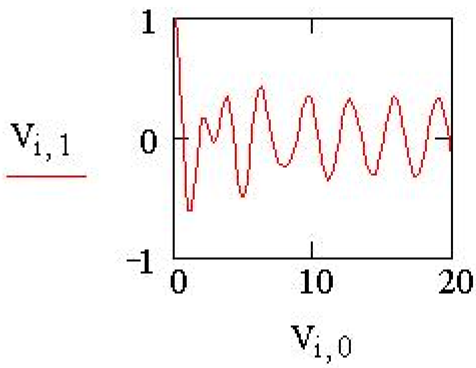
**** Система ОДУ 1-го порядка *****

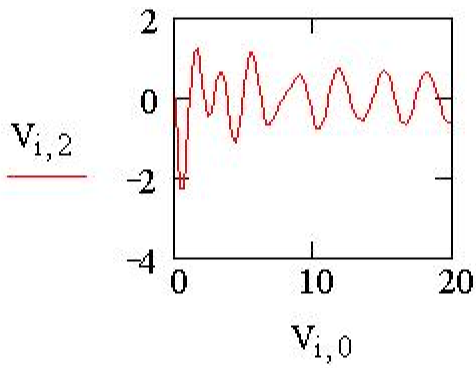
**** y''=-b*y'+f0*cos(2x)-k*y ****
**** задача Коши y (0)=1, y' (0)=3 ****
**** переходим к системе уравнений ****
**** y'= z ****
**** z'=-b*z+f0*cos(2x)-k*y ****
**** в примере введен столбец правых частей производных, ****
**** где y--> u0 z--> u1 ****

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k := 10 \;\; b := 0.51 \;\; f0 := 2$$

$$D(x,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \cdot b + f0 \cdot \cos(2 \cdot x) - u_0 \cdot k \end{pmatrix}$$

$$V := \mathrm{rkfixed}(u, 0, 20, 100, D)$$





<u>*Задачи*</u>

3.4.1. Количество вещества x, участвующего в химической реакции, определяется уравнением:

dx/dt= -x

Найти количество вещества при t=10сек, если в начальный момент оно равно 0.4 моль

3.4.2. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Уравнение радиоактивного распада:

$$dN/dt= -UN$$

U связано с периодом полураспада T соотношением: U=Ln2/T. Найти зависимость N (t). За сколько дней распадется 90% первоначального количества вещества?

3.4.3. Количество света, поглощающегося при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 3м поглощается половина первоначального количества света. Найти зависимость поглощенного света от толщины слоя воды. Какой толщины слой воды поглотит 99% падающего света?

3.4.4. Изолированному проводнику сообщен заряд Q_0. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет заряд. Скорость потери заряда пропорциональна имеющемуся заряду. Коэффициент пропорциональности k=0.1мкКл/час. За какое время проводник разрядится полностью?

3.4.5. Зависимость атмосферного давления от высоты описывается уравнением:

$$dp= - kpdh$$

где $k= 1.6\cdot 10^{-4}$ $м^{-1}$. Найти зависимость давления от высоты. Каково давление воздуха на высоте 9 км, на которой летают пассажирские самолеты?

3.4.6. Катер движется в спокойной воде со скоростью v=10 км/ч. На полном ходу его мотор был выключен. Найти время, за которое катер остановится, если сила сопротивления пропорциональна скорости. Коэффициент пропорциональности k=0.5км/мин.

3.4.7. Температура вынутого из печи хлеба равна 100^oC, температура воздуха 25 ^oC. За какое время хлеб остынет до температуры воздуха? Скорость изменения температуры пропорциональна разности температур хлеба и среды. Коэффициент пропорциональности k=0.04.

3.4.8. Кусок металла с температурой A0 помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от A0 до B0 . При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти зависимость температуры металла от времени. Скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Коэффициент пропорциональности k=0.04.

3.4.9. Если атом вещества A превращается в атом вещества B, а тот, в свою очередь, превращается в атом вещества C, то говорят о последовательном распаде или радиоактивном семействе. Обозначив количество ядер радиоактивных элементов за A и B, а вероятности распада за W и U. Тогда процесс распада описывается уравнением:

$$dA/dt= - WA$$
$$dB/dt= - UB+WA$$

Найти зависимость A(t) и B(t). Периоды полураспада: T1=Ln2/W=0.53мин, T2=Ln2/U=3.05мин.

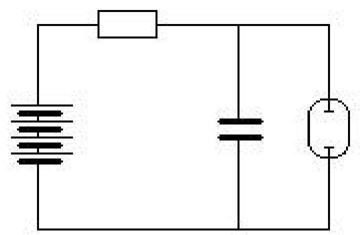
3.4.10. В цепь последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при t=0 равен Q. Цепь замыкается в момент времени t=0. Найти силу тока в цепи при t>0.

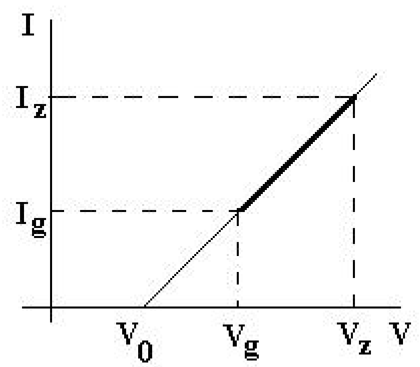
3.4.11. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока напряжения U, сопротивления R, индуктивности L и выключателя, который включается при t=0, и выключается при t=t0. Найти зависимость силы тока от времени.

3.4.12. Решить задачу 3.4.11, заменяя индуктивность L конденсатором емкости C. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен.

3.4.13. Конденсатор заряжен от источника постоянной ЭДС через сопротивление R и индуктивность L, причем R^2= 4L/C. Как меняется заряд конденсатора Q со временем?

3.4.14.* Конденсатор емкостью C заряжается от батареи с ЭДС через сопротивление R. Параллельно конденсатору присоединена неоновая лампа, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке.





Процесс зарядки продолжается до тех пор, пока напряжение на пластинах конденсатора не достигнет значения Vz, при котором лампа вспыхивает, затем идет процесс разрядки конденсатора до тех пор, пока напряжение на нем не упадет до Vg, при котором неоновая лампа гаснет и т.д. Построить график зависимости напряжения на пластинах конденсатора от времени. Найти продолжительность зарядки и разрядки конденсатора, от каких параметров зависят эти величины?

3.4.15. В прямоугольный бак размерами: длиной 60 см, шириной 75см и высотой 80 см, поступает 1 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2.5 $см^2$. За какое время наполнится бак? Сравнить результат со временем наполнения такого же бака без отверстия в дне. Скорость вытекания жидкости $v = 0.6\sqrt{2gH}$, где H- высота столба жидкости над отверстием.

3.4.16. За какое время вытечет вода из цилиндрического бака диаметром 2R=1.8м и высотой H=2.45м через отверстие в дне диаметром 2r=6см? Ось цилиндра вертикальна. Скорость вытекания жидкости $v = 0.6\sqrt{2gh}$, где h- высота столба жидкости над отверстием.

3.4.17. За какое время вытечет вода из цилиндрического бака, если ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие, из которого вытекает вода, находится в самой нижней части цилиндра. Скорость вытекания жидкости $v = 0.6\sqrt{2gh}$, где h- высота столба жидкости над отверстием. Длина бака 2 м, радиус 0,5 м, диаметр отверстия 2см.

3.4.18. Воронка имеет форму конуса диаметром R=6см и высоты H=10см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметром d=0.5 см, сделанное в вершине конуса?

3.4.19. На дне котла, имеющего форму полушара радиуса R=1м, образовалась щель площадью S=0.25см^2. Найти время вытекания всей воды из котла.

3.4.20. Сферический резервуар диаметром D=2.75м наполнен водой. Найти время, необходимое для истечения всей воды через круглое отверстие в дне диаметром d=3.7см.

3.4.21. Два вертикальных резервуара высота 4.5м и 4м в диаметре поставлены рядом и соединены у дна коротким шлангом диаметра 0,16 м. Если вначале один резервуар заполнен водой, а другой пуст, то по истечении какого времени вода будет находиться в них на одном уровне? Построить зависимость уровня воды в каждом сосуде от времени.

3.4.22. Два сообщающихся сосуда имеют форму параллелелепипедов, площади основания которых равны S1 и S2. Найти время, необходимое для установления одинаковых уровней жидкости в сосудах, если S1=S2=100 м^2, начальная разность уровней H=2,5 м, площадь отверстия W=0,5 м^2.

3.4.23. В цилиндрическом баке с площадью основания S и высотой H на высоте h от основания сделано отверстие диаметром d. Нарисовать струю воды, вытекающую из отверстия.

3.4.24. В стенке цилиндрического ведра с диаметром основания P и высотой H просверлено n маленьких отверстий диаметром d, находящихся на высоте h друг от друга, (n+1)h=H. Ведро доверху наполнено водой. Необходимо определить время, за которое уровень воды в ведре опустится до нижнего отверстия.

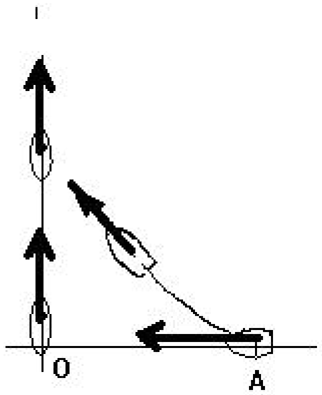
3.4.25. Лодка замедляет своё движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость 1,5 м/сек, коэффициент пропорциональности для силы трения k=-0,125. Какой путь пройдёт лодка до остановки?

3.4.26. Вычислить время падения мяча с высоты h м без начальной скорости с учётом сопротивления воздуха. Сила сопротивления пропорциональна скорости движения. Найти скорость в конце падения.
3.4.27. Футбольный мяч m=0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/сек. Сопротивление воздуха пропорционально скорости и равно 0,48 при скорости 1м/сек. Найти время подъёма мяча и наибольшую высоту подъёма. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?
3.4.28. Ракета вылетела вертикально вверх с начальной скоростью 100м/сек. Сопротивление воздуха замедляет её движение, сообщая ракете постоянное ускорение a=-kv. Найти время достижения ракетой наивысшего положения.
3.4.29. По наклонной плоскости длинной L=10 м и углом наклона α=45 градусов движется тело. Коэффициент трения k=0,5. Определить закон движения тела и время, в течение которого тело пройдёт вдоль наклонной плоскости, если в начальный момент оно находилось в покое на верхней грани наклонной плоскости.
3.4.30. Тело плотности ρ медленно погружается в воду. Найти зависимость пройденного телом расстояния как функцию времени, если в момент t=0 тело находилось в покое.
3.4.31. Пуля проходит через доску толщиной L=7,5 см, которая задерживает её движение, сообщая ей постоянное ускорение $a=45*10^4$ м/сек^2. Сколько времени заняло движение через доску и какова будет скорость пули при вылете из доски?
3.4.32. Допустим, что через земной шар проложен узкий трубопровод, проходящий через центр Земли. Упавший в него камень притягивается центром Земли с силой, прямо пропорциональной расстоянию между ними. Определить характер движения. За какое время камень пролетит Землю насквозь? Коэффициент пропорциональности k=9,81/6400.
3.4.33. Найти время, нужное метеору для того, чтобы достичь Земли с высоты 400000 км.
3.4.34. Масса лётчика с парашютом M. Сопротивление воздуха при спуске пропорционально квадрату скорости (k=400). Найти скорость спуска U(t) и максимальную скорость при спуске.
3.4.35. Тело весом P, брошено с начальной скоростью V0 под углом α к горизонту, движется под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости. Найти наибольшую высоту подъёма H. Коэффициент сопротивления 0,2.
3.4.36. Цепь длиной L=4 м соскальзывает с гладкого горизонтального стола, в начальный момент со стола свисал конец цепи длиной L=0,5 м. Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей цепи со стола.
3.4.37. Цепь переброшена через гладкий гвоздь так что с одной стороны свисает часть её длиной L=8 м, а с другой стороны часть длиной 10 м. При скольжении ускорение пропорционально разности длин частей, свисающих с обеих сторон. Через какое время соскользнёт цепь?

3.4.38. Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью W. Шар, помещённый внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти траекторию движения шара. В начальный момент шар находится на оси вращения и имел скорость U0 вдоль трубки.

3.4.39. Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m г/сек, движется по инерции со скоростью V_0 см/сек. Сопротивление среды пропорционально скорости движения капли и её радиусу. В начальный момент при t=0 оно равно r_0 Н. Найти зависимость скорости капли от времени.

3.4.40. Судно выходит из точки О и с постоянной скоростью плывёт по направлению прямой OY. В тот же момент времени из точки А выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью, в 2 раза больше скорости судна. Найти траекторию движения катера и время, необходимое для достижения судна.

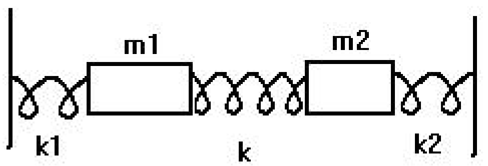


3.4.41.Найти период свободных колебаний массы m, подвешенной к пружине, если движение происходит без сопротивления. При отклонении груза от положения равновесия на расстояние x, пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия.

3.4.42. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массой m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления равна hV. При t=0 грузу, находящемуся в положении равновесия, сообщена скорость V0. Исследовать движение груза в случаях: h^2<4 km, h^2>4 km.

3.4.43. Решить задачу 3.4.42 при дополнительном условии, что к грузу приложена ещё периодическая внешняя сила.

3.4.44. Два груза массой m1 и m2 (m1=m2) соединены пружинами, как показано на рис. Жесткости пружин k1=k2, k<<k1, k2. Найти возможные периодические движения системы при различных значениях k.



Глава 4. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

§4.1. Введение

Студенты, не выполнившие учебный план, выполняют контрольную работу по темам, несданным в течение семестра. Контрольная работа проводится письменно и применение численной схемы простейшего численного метода, из разработанных для данного класса задач, к конкретному примеру. Для задачи численного интегрирования студент должен уметь применить метод прямоугольников (слева и справа) и метод трапеций, для задачи интерполирования – метод Лагранжа, для задачи аппроксимации – метод наименьших квадратов, при решении нелинейных уравнений – метод дихотомии, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка – метод Эйлера. Примеры решения таких задач приведены ниже.

В рамках экзамена по дисциплине «Программирование и численные методы», проводится письменная проверка минимальных знаний и умений студента. Первая часть задания предполагает написание операторов языка Паскаль (операторы описания типа переменных, ввода-вывода, цикла), реализацию алгоритмов подсчета сумм, работы с массивом, написание подпрограмм.

Вторая часть задания посвящена проверке умений написания численных схем для нахождения определенных интегралов, интерполяционных полиномов, решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Каждое задание оценивается определенным количеством баллов.

§4.2. Контрольные работы

Численное интегрирование.

Задание: Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла. (3 балла)

$$\int_{1}^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx$$

Решение:

Сначала необходимо определить переменную интегрирования (по дифференциалу), пределы интегрирования по ней и рассчитать шаг. В данном случае, переменная x изменяется от 1 до 10. Шаг h=(10-1)/n=9/n (n-число разбиений, например, n=100).

В квадратурных формулах численного интегрирования переменная интегрирования меняется дискретно $x_i = a + i \cdot h$. В данном случае $x_i = 1 + 9i/n$.
Значение x_i используется для вычисления значения функции:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i}\cos(c \cdot x_i) = \frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n))$$

В методе прямоугольников слева искомый интеграл рассчитывается по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Окончательно записываем численную схему для вычисления данного интеграла методом прямоугольников слева:

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n))$$

В методе прямоугольников справа суммирование ведется по i=1,n.

В методе трапеций необходимо еще найти

$$y_{i+1} = \frac{1}{x_{i+1}}\cos(c \cdot x_{i+1}) = \frac{1}{1+9(i+1)/n}\cos(c \cdot (1+9(i+1)/n))$$

и подставить его в формулу для метода трапеций

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\frac{y_{i+1}+y_i}{2} = \frac{9}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1+9i/n}\cos(c \cdot (1+9i/n)) + \frac{1}{1+9(i+1)/n}\cos(c \cdot (1+9(i+1)/n))\right]$$

Аппроксимация

Пример задания:

А. Привести функцию к линейному виду, выразить параметры нелинейной функции через параметры линейной функции

$$y = b + \frac{a}{x+1}; \quad y = m \cdot e^{n \cdot x}$$

Б. Даны точки (1,3), (3,6), (4,4). Вывести уравнения и найти коэффициенты линейной аппроксимации $y=a_0+a_1 \cdot x$.

Решение:

А. Функцию $y = b + \frac{a}{x+1}$ нужно привести к виду $y1 = a1 \cdot x1 + b1$.

Следовательно, нужно сделать замену $x1 = \frac{1}{x+1}$, при этом $y = a \cdot x1 + b$

Функция приведена к линейному виду, параметры нелинейной функции совпадают с параметрами линейной: a=a1; b=b1.

Функцию $y = m \cdot e^{n \cdot x}$ также приведем к виду $y1 = a1 \cdot x1 + b1$. Для этого прологарифмируем исходную нелинейную функцию:ln(y)=ln(m)+n·x. Следовательно, нужно сделать замену y1= ln(y); b1= ln(m), a1=n, тогда функция примет вид $y1 = a1 \cdot x + b1$. Параметры исходной функции находятся из параметров полученной линейной функции следующим образом: $n = a1, \quad m = e^{b1}$

Б. Данные точки обозначим (x1,y1), (x2,y2), (x3,y3), аппроксимирующую прямую $F(x)=a_0+a_1 \cdot x$. Нужно найти коэффициенты прямой a_0,a_1, такие что сумма квадратов отклонений значений функции $F(x_i)$ от ординат данных точек y_i была минимальной. То есть

$$R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 x))^2 \to \min$$

Сумма квадратов отклонений будет минимальна, если

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = -2\sum (y_i - (a_1 x_i + a_0)) = -2\sum (y_i - a_1 x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = -2\sum (y_i - (a_1 x_i + a_0))x_i = -2\sum (y_i x_i - a_1 x_i^2 - a_0 x_i) = 0$$

$$\sum y_i x_i - a_1 \sum x_i^2 - a_0 \sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a_1 \sum x_i - a_0 n = 0$$

Обозначим

$$M_x = \sum x_i, M_y = \sum y_i, M_{xy} = \sum x_i y_i, M_{xx} = \sum x_i^2$$

Везде суммирование ведется по всем точкам i=1..n. Тогда для определения a_0 и a_1 получается система уравнений :

$$a_1 M_{xx} + a_0 M_x = M_{xy}$$

$$a_1 M_x + a_0 n = M_y$$

Выражения для параметров имеют вид:

$$a_1 = \frac{M_{xy} n - M_x M_y}{M_{xx} n - M_x M_x}, a_0 = \frac{M_{xx} M_y - M_x M_{xy}}{M_{xx} n - M_x M_x}$$

Найдем значения параметров для данных точек.

M_x=1+3+4=8; M_{xx}=$1^2+3^3+4^2$=26; M_y=3+6+4=13; M_{xy}=1*3+3*6+4*4=37; n=3

$$a_1 = \frac{37\cdot3-8\cdot13}{26\cdot3-8\cdot8} = 0.5 \qquad a_0 = \frac{26\cdot13-8\cdot37}{26\cdot3-8\cdot8} = 3$$

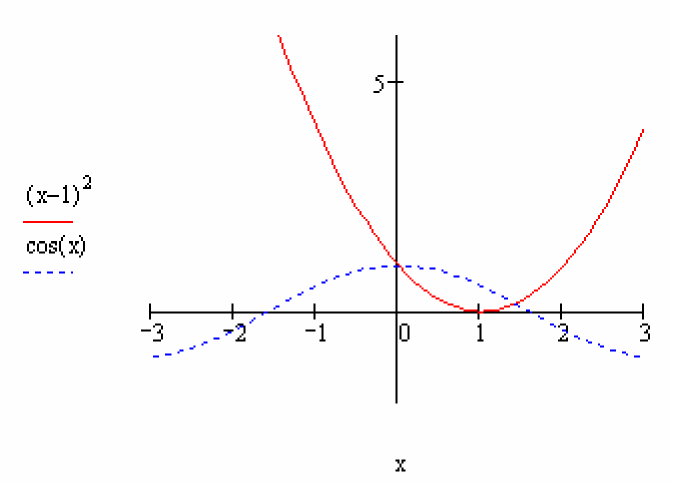
Нелинейные уравнения

Пример задания:

Записать определение корня нелинейного уравнения. Отделить хотя бы один корень данного уравнения. Написать алгоритм нахождения корня при решении данного уравнения методом дихотомии. $(x-1)^2 = \cos(x)$

Решение:

Решениями нелинейного уравнения является набор значений независимой переменной x, при подстановке которых в уравнение, оно превращается в тождество.



Для нахождения значения корня методом дихотомии, его нужно отделить, то есть найти отрезок, на котором находится один корень. Для этого можно изобразить график функции F(x)= $(x-1)^2$-cos(x) и искать отрезки, на которых эта функция пересекает ось x, так как значения x в точках пересечения являются решениями нелинейного уравнения. Однако, для простых функций (как в этом примере) удобнее построить графики правой и левой частей уравнения и искать отрезки, на которых эти функции пересекаются. Если построить графики функций $(x-1)^2$ и cos(x) (на рисунке), то видно, что уравнение имеет по одному корню на отрезках [-1,1] и [1,2]. Для описания алгоритма выбираем любой из них, например, [1,2].

Алгоритм нахождения корня при решении уравнения методом дихотомии:

1) Приводим уравнение к виду F(x)= $(x-1)^2$-cos(x)=0. Ищем корень на отрезке [1,2]. В данном случае, a=1, b=2. Проверяем, что функция F(x) на этом отрезке меняет знак (считать не надо!): $((1-1)^2-\cos(1))\cdot((2-1)^2-\cos(2))<0$.

Задана точность ε.

2) За новое приближение корня берется точка c. $c=\frac{a+b}{2}$. Вычисляется значение функции в этой точке $F(c)=(c-1)^2-\cos(c)$.

3) Проверяют, удовлетворяет ли приближение заданной точности.

$|(c-1)^2-\cos(c)|<\varepsilon$ или $|b-a|<\varepsilon$

Если да, то заканчивают счет и считают, что корень уравнения равен c (с точностью ε).

4). Если условие из п.3 неверно, то проверяют, в какой части отрезка [a,b] находится корень. Считается, что корень находится на том отрезке, где функция меняет знак. То есть, если $((c-1)^2-\cos(c))\cdot((b-1)^2-\cos(b))<0$, то корень лежит на отрезке $[b,c]$, то есть $a=c$.

Если это условие не выполняется, то корень лежит на отрезке $[a,c]$, то есть $b=c$.

5). Далее переходим к п.2

Указание: В некоторых заданиях даны значения корней.
Например: $x^3-x=0$. Корни x1=-1, x2=0, x3=1. В этом случае предполагается, что нужно выбрать отрезок $[a,b]$ так, чтобы только один из корней был внутри, но не посередине! В этом примере, можно выбрать отрезки [-2,-0.5] или [-0.5,0.8], или [0.5,2] и др.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пример задания:
Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ первого порядка $z'=-(z+y)y$
или для уравнения 2-го порядка $xy''=y'-\cos(y)$

Решение:

Уравнение 1-го порядка: z'=-(z+y)y

Решением данного ОДУ является функция z(y) (определяем название функции по производной). Задача Коши, например, z(1)=4.

По теории для уравнения $x'=f(t,x)$ схема Эйлера записывается в виде

$x_{i+1}=x_i+h\cdot f(x_i, t_i)$

$t_{i+1}=t_i+h$,

i=0,1,2,3,… h- шаг, выбирается в зависимости от нужной точности.

Например, h=0.1

Схема Эйлера для данного уравнения

$y_{i+1} = y_i + h$

$z_{i+1} = z_i - h \cdot (z_i + y_i) \cdot y_i$

Причем из начального условия имеем $y_0=1$, $z_0=4$. Тогда

$y_1 = 1 + h$

$z_1 = 4 - h \cdot (4+1) \cdot 1$

Уравнение 2-го порядка: xy”=y’- cos(y)

Решением является функция y(x).

Задача Коши: y(0)=1; y’(0)=2;

Уравнение xy”=y’- cos(y) преобразуем к виду y”=(y’-cos(y))/x.

Делаем замену y’=z, получаем систему

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = (z - \cos(y))/x \end{cases}$$

Схема Эйлера

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i$

$z_{i+1} = z_i + h \cdot (z_i - \cos(y_i))/x_i$

Из начальных условий имеем $x_0=0$, $y_0=1$, $z_0=2$.

§4.3. Примеры заданий письменного экзамена

Примеры заданий на написание численных схем для нахождения определенных интегралов:

а). Записать формулу метода прямоугольников справа (слева) для интеграла

$$\int_{-1}^{2} x^a \left(a^3 - x^3\right) dx$$

б). Записать формулу метода трапеций для интеграла

$$\int_{0.5}^{0.7} (x+a)(a-x)^2 dx$$

Решение задания производится так же, как в примере решения задачи на численное интегрирование контрольной работы, приведенном в §4.2.

Примеры заданий на написание численных схем для решения обыкновенного дифференциального уравнения:

Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ. Найти значения искомой функции в точках с номерами 0 и 1.

а) yx+y’/x=0

б) $\begin{cases} x'+2xt-y=0 \\ 2y'+y+x=0 \end{cases}$

в) y”+2yy’=(2x+1)y’

г) 2p”-p’-3u=up

Решение задания производится так же, как в аналогичном примере контрольной работы, приведенном в §4.2.

Примеры заданий на написание интерполяционных полиномов:

Даны узлы интерполяции (1,0),(3,4),(5,-2),(6,2). Записать формулу интерполяционного полинома Лагранжа, проходящего через четыре точки. Доказать, что полином проходит через точку (3,4).

Решение:

В соответствии с теорией (см. стр. 26 данного пособия), интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через 4 точки, имеет вид:

$$y(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Следовательно, полином Лагранжа, проходящий через данные 4 точки:

$$y(x)=4\frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(3-1)(3-5)(3-6)}-2\frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(5-1)(5-3)(5-6)}+2\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(6-1)(6-3)(6-5)}$$

В точке (3,4):

$$y(3)=4\frac{(3-1)(3-5)(3-6)}{(3-1)(3-5)(3-6)}-2\frac{(3-1)(3-3)(3-6)}{(5-1)(5-3)(5-6)}+2\frac{(3-1)(3-3)(3-5)}{(6-1)(6-3)(6-5)}=4$$

Примеры заданий на решение систем линейных алгебраических уравнений и нахождения определителей матриц методом Гаусса:

Найти решение система уравнений, рассчитать определитель матрицы коэффициентов.

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-4x_3=-6 \\ -x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_1+3x_2-3x_3=2 \end{cases}$$

1 шаг. Исключение неизвестного x_1 из всех уравнений, кроме первого.

1-е уравнение делят на a_{11}=2, умножают на a_{21}= -1 и вычитают из 2-го, умножают на a_{31}=1 и вычитают из 3-го.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

2 шаг. Исключение неизвестного x_2 из второго уравнения
2-е уравнение делят на $a_{22}= 3$, умножают на $a_{32}=2$
и вычитают из 3-го

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad -{x_3}/{3} = -{4}/{3} \end{cases}$$

3 шаг. Нахождение неизвестных

Из 3-го уравнения $x_3 = \dfrac{-4/3}{-1/3}=4$

$x_2= (5+x3)/3=3$
$x_1= (-6+4x3 – 2x2)/2= 2$

Для нахождения определителя матрицы коэффициентов, ее приводят к треугольному виду аналогичным образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Значение определителя матрицы при таких преобразованиях не меняется и легко рассчитывается для треугольной матрицы det=2·3·1/3=2

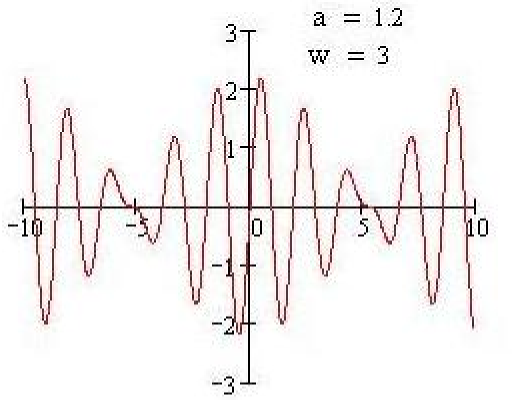
ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Кирьянов. Самоучитель Mathcad 2001. –СПб.:БХВ- Петербург, 2003.
2. Н. Ширяев. Научно-технические расчеты с помощью пакета MathCad. М.:Высшая школа, 2004.
3. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в MathCad. Учебный курс.-СПб.:Питер, 2005.
4. В.П. Дьяконов. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ.-М.:Наука,1987.
5. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика./Под ред. Сивухина Д.В.-М.:Наука, 1976.
6. Х. Кухлинг. Справочник по физике. М.:Мир, 1982.
7. Н Кошкин, М.Г. Ширкевич. Справочник по элементарной физике.-М.:Наука, 1976.
8. Н.И. Карякин, К.Н. Быстров, П.С. Киреев. Краткий справочник по физике. М.:Высшая школа, 1964.
9. Выготский М.Я. Справочник по высшей математике. М.:Наука, 1976

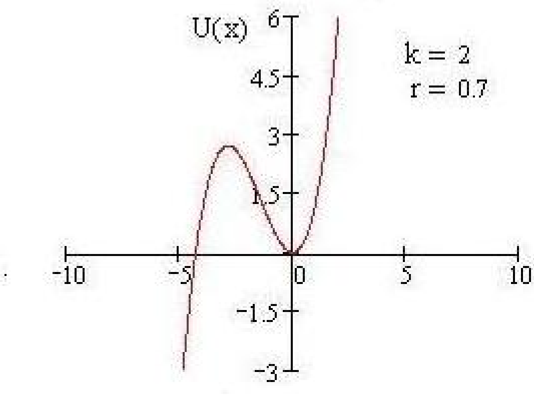
ОТВЕТЫ

Ответы к теме «Графические возможности пакета»

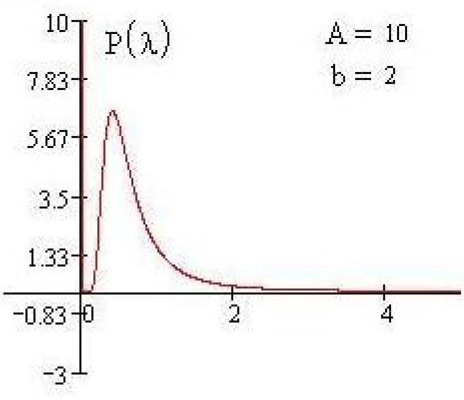
2.9 $y(t) = a \cdot \sin(w \cdot t) + \sin(a \cdot w \cdot t)$



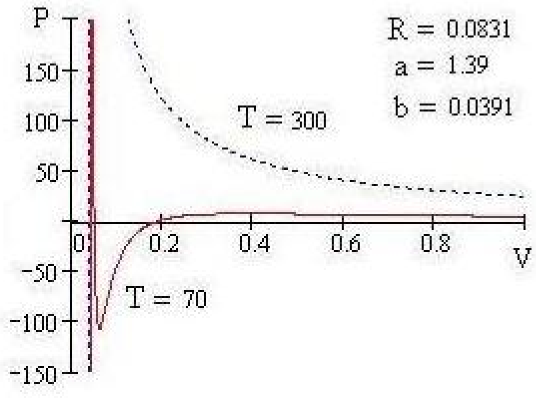
2.10 $U(x) = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{r \cdot x^3}{3}$



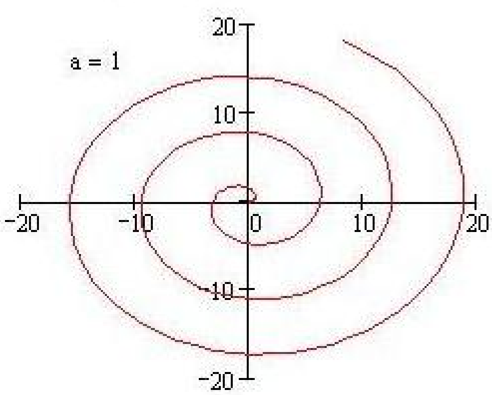
2.11



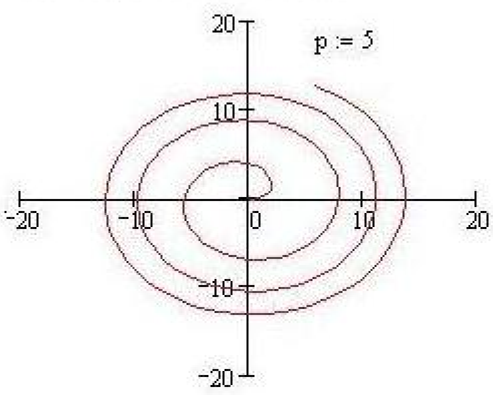
2.12



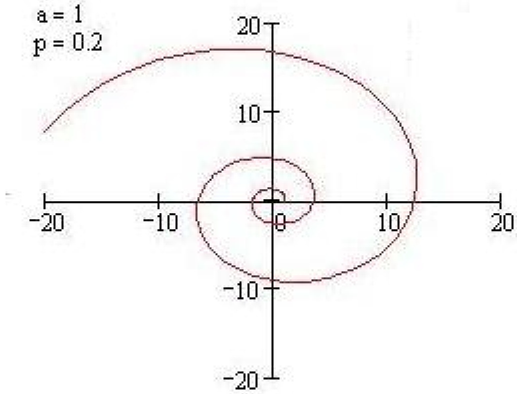
2.13 Спираль Архимеда



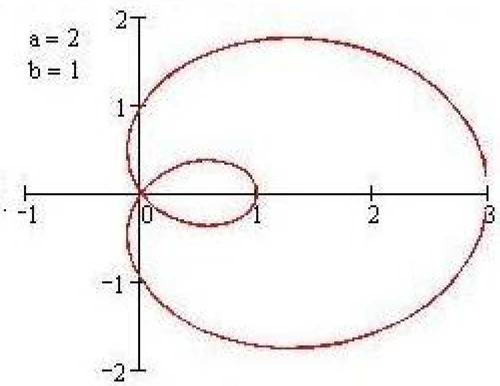
2.14 Параболическая спираль



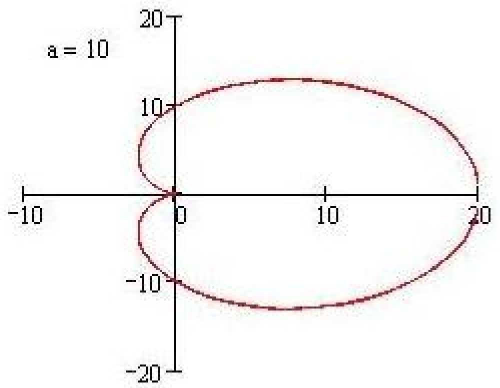
2.15 Логарифмическая спираль



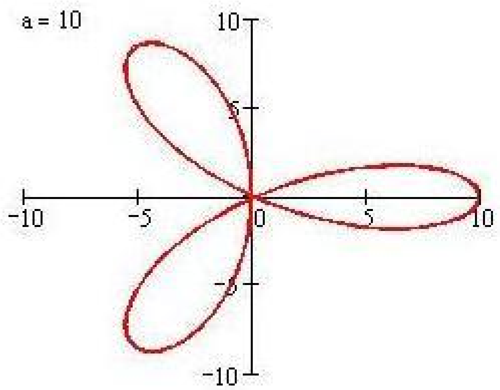
2.16 Улитка Паскаля



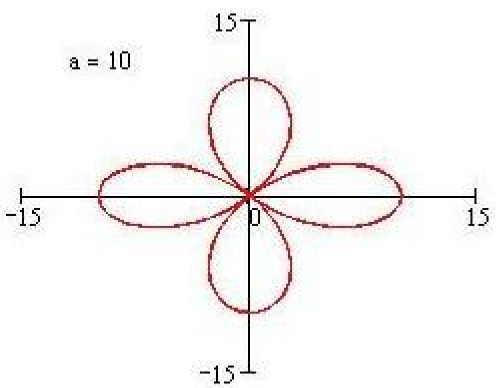
2.17 Кардиоида



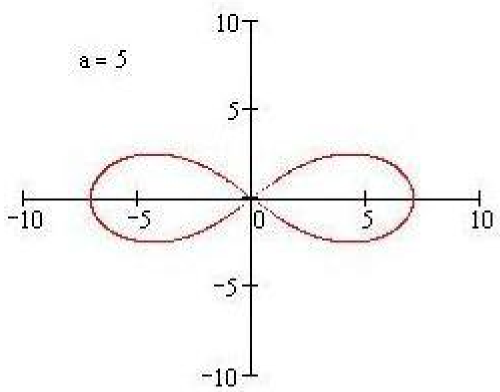
2.18 Трилистник



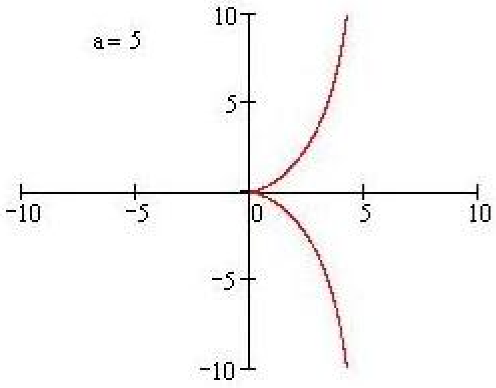
2.19 Четырехлистник



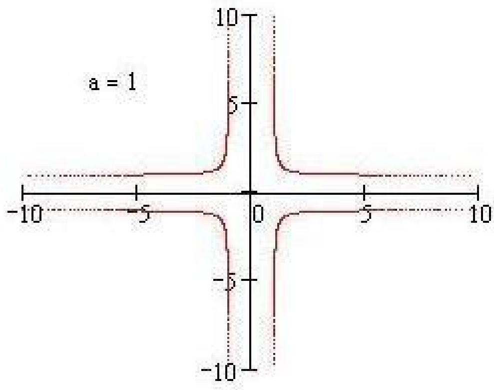
2.20 Лемниската



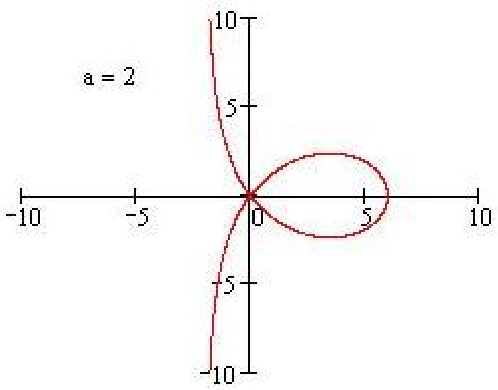
2.21 Циссоида Диоклеса



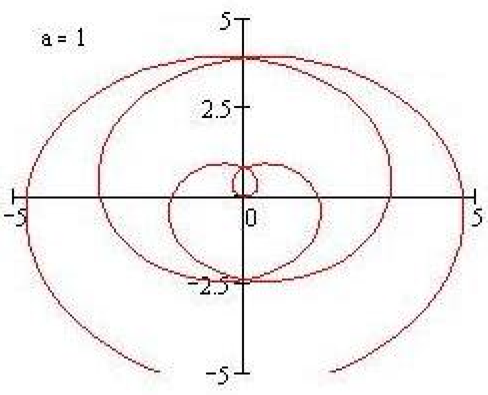
2.22 "Крест"



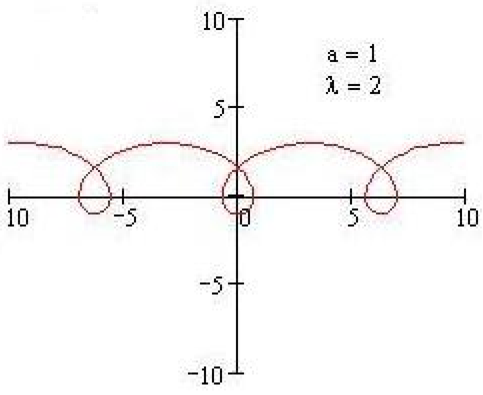
2.23 Трисектриса



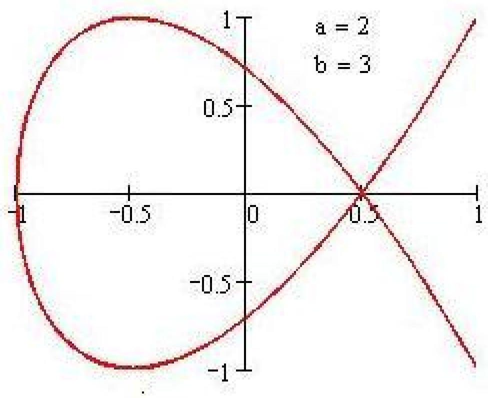
2.27 Спираль



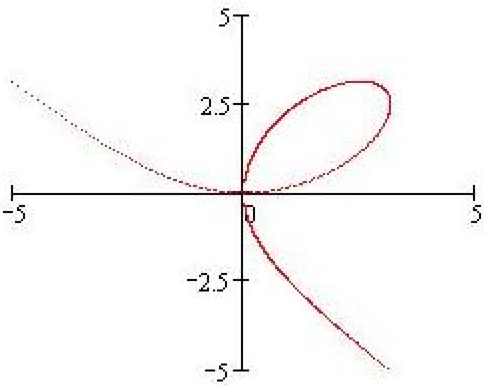
2.28 Циклоида



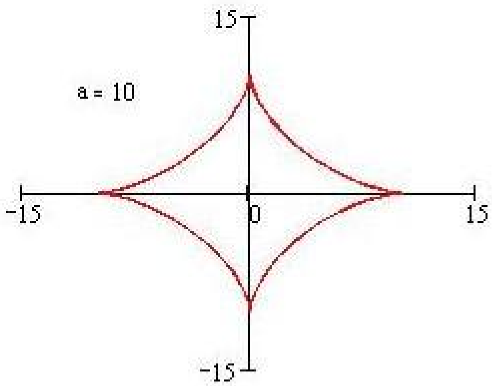
2.29 Фигуры Лиссажу



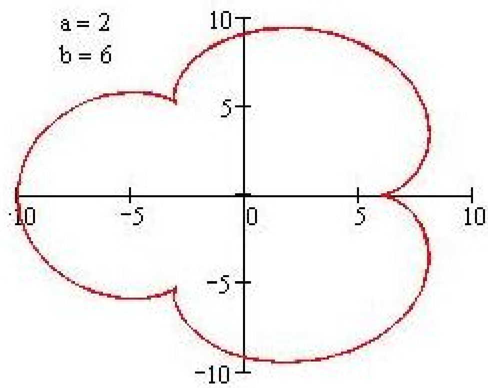
2.30 Декартов лист



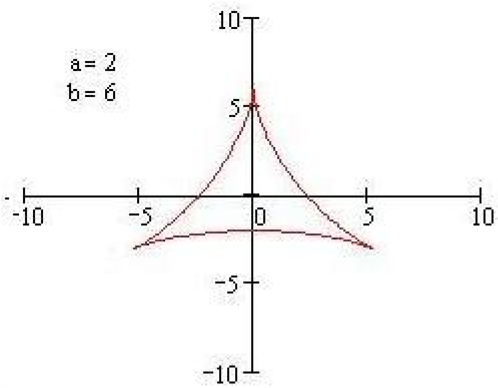
2.31 Астроида



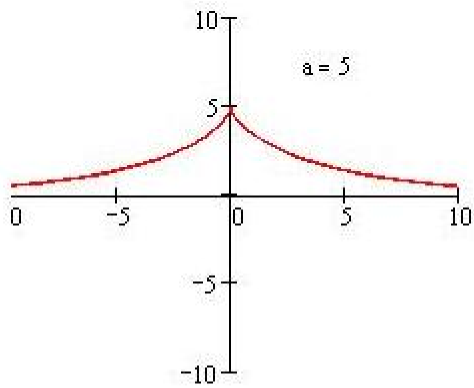
2.32 Эпициклоида

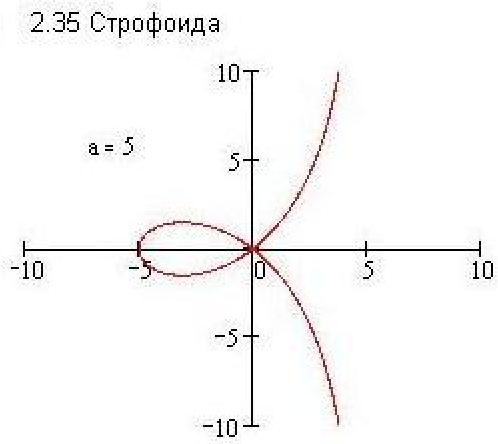


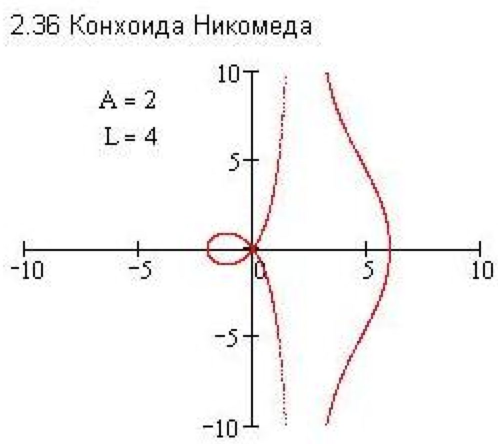
2.33 Гипоциклоида



2.34 Трактриса







Ответы к теме «Нелинейные уравнения»

3.3.1 При h=10 м, d=5.04 мкм.
3.3.2 h=13.054 см. При ρ=0.5г/см^3 , h=20 см.
3.3.3 Уравнение

$$g\cdot L\left[\pi R^2\left(\rho-\rho_w\right)+\rho_w\left(R^2\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)-\left(R-h\right)\sqrt{2hR-h^2}\right)\right]=0$$

При $\rho_ж$=1г/см^3, ρ=0,75г/см^3 , R=20 см высота плавающей части h=11.92 см, расстояние от оси цилиндра до поверхности жидкости R-h=8.08 см.
3.3.4 При ρ=0.5г/см^3 и H=20 см, x=15.87 см.
3.3.5 v=15 м.с или 54 км/ч
3.3.6 w=11.612, v=0.35*w=4.064м/с
3.3.7 Два корня, нужный x=0,347м
3.3.8 При Q=1 ед. заряда x=5,000005698 см
3.3.9 При Q1=Q2=0.001, Q3=0.002, L1=0.02, L2=0.01
Два корня x=0,0089 и x=-0,0356 м
3.3.10 T=531,7 K
3.3.11 T=337,8 K
3.3.12 T=2132.2 K
3.3.13 x_2=0.758, x_3=1,698
3.3.14 U_1=0.043 B, U_2=0.234 B, U_3=0.625 B,
3.3.15 U=2.587 B, U=1.193 B.
3.3.16 x=0,998 см
3.3.17 x=64,95 см.
3.3.18 D=1.934 см.
3.3.21

Газ	V

Гелий	10.390
Водород	10.397
Азот	10.398
Кислород	10.383
CO_2	10.356

3.3.22

Газ	T	V_1	V_2
Гелий	4	0.035	0.105
Водород	20	0.035	1.53
Азот	70	0.049	0.197
Кислород	90	0.041	7.31
CO_2	190	0.0568	15.58

3.3.23 Для всех газов при T=293K, P=1 атм, V=24,3 л.
3.3.24 1-е уравнение Дитеричи (искомое V=b)

Газ	V (P=1, T=293)
Гелий	35.6
Водород	39.9
Азот	58.5
Кислород	47.9
CO_2	64

3.3.25 2-е уравнение Дитеричи

Газ	V (P=1, T=293)
Гелий	18.0
Водород	19.9
Азот	29.3
Кислород	23.9
CO_2	32.0

3.3.26. Уравнение Битти-Бриджмена: при P=1 атм, T=293 K, V=24.28 л.
3.3.27. Производная функции мощности сильно меняется в районе максимума, корень чувствителен к начальному значению. Максимум мощности излучения при T=350 K: λ_{max}=2.66 мкм
3.3.28. При F=100 H, v=1.18

3.3.29. При F=10 Н, v=8.53
3.3.30. При T=700, P=5,   сжимаемость   Z=0.998
3.3.31. При T=293 К и P=1 атм, летучесть ксенона f=0.99, летучесть бензола f=0.93
3.3.32. См. задачу 3.3.33.
3.3.33. Нужно определить функцию y(r, α, φ)= φ1(r, α)+φ2(r, α)-φ , где φ1(r, α) и φ2(r,α)- потенциалы, создаваемые в данной точке соответствующими зарядами. Учтите, что процесс решения уравнения очень чувствителен к начальному значению корня. Поэтому, либо рассчитывайте массив (α_n, r_n) –координат точек равного потенциала- по частям, подбирая нужные начальные значения, либо используйте в качестве начального значения корень, найденный для предыдущей точки. В последнем случае удобно определить функцию вида:

```
g(x, f, a) := | v ← x
              | n ← 0
              | ak ← a + 6.28
              | TOL ← 10^-6
              | while a < ak
              |   | v ← root(y(f, v, a), v)
              |   | n ← n + 1
              |   | w_n ← v
              |   | a ← a + 0.2
              | w

m := 1.. 32

rr := g(2, -50, 0)

ar_m := m·0.2
```

Ответы к теме
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»:

3.4.1. При t=10 сек   x=1.8·10-5 молей.
3.4.2 За 30 дней распадается 50% первоначального количества радиоактивного вещества, за 100 дней – около 90%.
3.4.3. Указание: при численном решении задачи сначала подберите постоянный коэффициент поглощения, входящий в ОДУ. 99% света поглотится слоем 19.9 м.
3.4.4. Заряд уменьшится в 100 раз через 46 часов.
3.4.5. На высоте 10 км давление 0,237 атм.

3.4.6. Указание: расстояние находится двукратным интегрированием по времени.
Скорость упадет в 100 раз за 0,84 мин. Катер пройдет 0,33 км
3.4.7. при k=0,04 оС/мин T=25,1 оС за t =160 мин.
3.4.8. Указание.

ОДУ : $\frac{dT}{dt} = k \cdot \left(\frac{B0 - A0}{60} t - T \right)$. За 15.01 мин. металл нагреется до 25.02 оС.
Аналитически ОДУ может быть проинтегрировано при использовании подстановки
$z = k \cdot \left(\frac{B0 - A0}{60} t - T \right)$ При этом dT/dt следует выразить через dz/dt.

3.4.9. * Указание:
а) Для проверки численного решения используйте период полураспада;
б) Аналитическое решение для A(t) находится методом разделения переменных. Решение неоднородного линейного уравнения $\frac{dB}{dt} + U \cdot B = W \cdot A(t)$ ищется в виде произведения
решения однородного уравнения $\frac{dB}{dt} + U \cdot B = 0$ на неизвестную функцию $B(t) = C(t) \cdot e^{-Ut}$.
Таким образом, решение представляет собой сумму двух экспоненциальных функций (общего решения однородного и частного решения неоднородного ОДУ).
3.4.10. Заряд уменьшается в e=2.718 раз за время t=RC
3.4.11. При U=100 В, R=100 Ом,L=5миллиГн, за t0<0.001 сек установится I=1 А. Необходимо записать два ОДУ (для замкнутой цепи и при размыкании) и последовательно их решить, представив результат на одном графике.
3.4.12. При U=100 В, R=100 Ом,C=5·10-6 Ф, за t0<0.005 сек установится Q= 5·10-4 Кл. Необходимо записать два ОДУ (для замкнутой цепи и при размыкании) и последовательно их решить, представив результат на одном графике.
3.4.14.* Необходимо последовательно решать два ОДУ, описывающих зарядку и разряд конденсатора. Заряд конденсатора происходит сначала при Q0=0, затем при Q0=Uz/C.
Для ε =10 В, C=10-6Ф, R=10 Ом, Uz=5 В, Ug=5 В, время первой зарядки 7 мксек, время разрядки 13 мксек .
3.4.15. Время наполнения бака с отверстием 10,465 часов, без отверстия – 6 часов. Аналитически интегрирование легко производится по частям. Однако, полученная функция содержит высоту столба воды h неявно и не разрешима

относительно h. Произведите сравнение с численным решением при площади отверстия s=0.

3.4.16. Вода выльется из полного бака за 16.7 минут.

3.4.17.* Вода выльется из почти полного бака за 27 минут (чтобы избежать бесконечности в знаменателе, возьмите $h(0)=2R-\varepsilon$). Аналитически интегрирование производится по частям. Удобно выразить функцию t(h) и построить ее для сравнения с численным решением.

3.4.18. Вода выльется из конуса за 27.429 сек. Из-за особенностей производной численное решение не удается довести до конца.

3.4.19. Вода выльется из полного бака за 12.26 часов. Аналитически интегрирование производится по частям. Удобно выразить функцию t(h) и построить ее для сравнения с численным решением.

3.4.20. Вода выльется из полного бака за 1.022 часа. Аналитически интегрирование производится по частям. Удобно выразить функцию t(h) и построить ее для сравнения с численным решением.

3.4.21. Уровень воды в баках сравняется за 400 сек. Необходимо решать систему ОДУ для h1 и h2 -уровней воды в первом и втором баках. Аналитически можно получить решение, вычтя эти ОДУ друг из друга.