## *Примеры решения экзаменационного диктанта*

**Численное интегрирование**

**1.** Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом прямоугольников слева

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx$$

Решение:

В данном интеграле пределы интегрирования a=1, b=10. Возьмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{100} = 0.09$ и $x_i = a + i \cdot h = 1 + 0.09i$

Подынтегральная функция:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i}\cos(c \cdot x_i) = \frac{1}{1+0{,}09i}\cos(c \cdot (1+0{,}09i))$$

В методе прямоугольников слева искомый интеграл рассчитывается по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Окончательно записываем численную схему для вычисления данного интеграла методом прямоугольников слева:

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}\cos(cx)dx \approx 0{,}09\sum_{i=0}^{99}\frac{1}{1+0{,}09i}\cos(c \cdot (1+0{,}09i))$$

**2.** Записать формулу метода прямоугольников справа для интеграла

$$\int_{-1}^{2} x^a\left(a^3 - x^3\right)dx$$

Решение:

В данном интеграле пределы интегрирования a=-1, b=2. Возьмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{100} = 0.03$ и $x_i = a + i \cdot h = -1 + 0.03i$

Подынтегральная функция

$$y_i = f(x_i) = x_i^a(a^3 - x_i^3) = (-1+0.03i)^a(a^3 - (-1+0.03i)^3)$$

$$\int_{-1}^{2} x^a(a^3 - x^3)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_i = 0.03\sum_{i=1}^{100}(-1+0.03i)^a(a^3 - (-1+0.03i)^3)$$

**3.** Записать формулу метода трапеций для интеграла

$$\int_{0.5}^{0.7}(x-a)dx$$

Решение:

В данном интеграле пределы интегрирования a=0.5, b=0.7. Возмем число разбиений n=100. Тогда номера точек i=0..100. Шаг численного интегрирования

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.7-0.5}{100} = 0.002 \text{ и } x_i = a + i \cdot h = 0.5 + 0.002i$$

Подынтегральная функция

$$y_i = f(x_i) = (x_i - a) = (0.5 + 0.002i - a)$$

$$y_{i+1} = f(x_{i+1}) = (x_{i+1} - a) = (0.5 + 0.002(i+1) - a)$$

$$\int_{0.5}^{0.7} (x-a)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) =$$

$$= 0.001 \sum_{i=0}^{99} \left[ (0.5 + 0.002i - a) + (0.5 + 0.002(i+1) - a) \right]$$

**4.** Записать численную схему нахождения значения определенного интеграла методом прямоугольников справа

$$\int_c^{2c} \frac{1}{x} \cos(x) dx$$

Решение:
Шаг h=(2c-c)/n=c/n=0,01c (n-число разбиений, например, n=100).
Переменная интегрирования $x_i = c + 0{,}01c \cdot i$.
Значение $x_i$ используется для вычисления значения функции:

$$y_i = y(x_i) = \frac{1}{x_i} \cos(x_i) = \frac{1}{c + 0.01c \cdot i} \cos(c + 0.01c \cdot i)$$

Численная схема для вычисления данного интеграла методом прямоугольников справа:

$$\int_c^{2c} \frac{1}{x} \cos(x) dx \approx 0{,}01c \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{c + 0.01c \cdot i} \cos(c + 0.01c \cdot i)$$

**Обыкновенные дифференциальные уравнения**

1. Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ x+yx'=y. Найти значения искомой функции в точках с номерами 0 и 1.

**Решение :**
Решением является функция x(y). Задача Коши, x(2)=1.
Для записи схемы Эйлера, выразим производную

$$x' = \frac{y-x}{y}$$

Схема Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h$$

$$x_{i+1} = x_i + h \cdot (y_i - x_i) / y_i$$

$y_0=2$, $x_0=1$ (из задачи Коши).
Из схемы Эйлера для i=0: $y_1=2+h$; $x_1=1+h(2-1)/2=1+0.5h$

2. Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ z'=-(z+y)y Найти значения искомой функции в точках с номерами 0 и 1.

**Решение :**

z'=(z+2)cos(z)

Так как зависимость функции z от какой-то переменной неявная (второй буквы в ОДУ нет), в качестве независимой переменной выбираем любую букву, например, y. Тода решением является функция z(y). Задача Коши, z(1)=4.

Схема Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h$$

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot (z_i + 2) \cdot \cos z_i$$

$y_0$=1, $z_0$=4 (из задачи Коши).

Из схемы Эйлера для i=0: $y_1$=1+h; $z_1$=4+6h*cos(4)

3. Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ xy”=y’-cos(y). Найти значения искомой функции в точках с номерами 0 и 1.

**Решение :**

Решением является функция y(x).

Задача Коши: y(1)=3; y’(1)=2;

Выразим старшую производную y”=(y’-cos(y))/x.

Делаем замену y’=z, получаем систему

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = (z - \cos(y)) / x \end{cases}$$

Схема Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i$$

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot (z_i - \cos(y_i)) / x_i$$

$x_0$=1, $y_0$=3, $z_0$=2 (из задачи Коши).

Из схемы Эйлера для i=0:

$x_1$=1+h; $y_1$=3+2h; $z_1$=2+h(2-cos(3))/1;

4. Написать, что является решением данного дифференциального уравнения. Выбрать начальные условия для задачи Коши. Записать схему Эйлера для данного ОДУ z”+yz’=y-z Найти значения искомой функции в точках с номерами 0 и 1.

**Решение:**

Решением является функция z(y).

Задача Коши: z(0)=1; z’(0)=2;

Выразим старшую производную z”=y-z-yz’.

Делаем замену z’=t, получаем систему

$$\begin{cases} z' = t \\ t' = y - z - yt \end{cases}$$

Схема Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h$$

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot t_i$$

$$t_{i+1} = t_i + h \cdot (y_i - z_i - y_i t_i)$$

$y_0$=0, $z_0$=1, $t_0$=2 (из задачи Коши).

Из схемы Эйлера для i=0:

$y_1$=h; $z_1$=1+2h; $t_1$=2+h(0-1-0*2)=2-h;

**Интерполяция полиномом Лагранжа**

1. Даны узлы интерполяции (-1,2),(2,3),(3,6),(4,7),(5,6). Записать формулу интерполяционного полинома Лагранжа, проходящий через 5 точек. Чему равно значение полинома при x=4?

**Решение:**

$$L_5(x)=2\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)(-1-5)}+3\frac{(x+1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2+1)(2-3)(2-4)(2-5)}+6\frac{(x+1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3+1)(3-2)(3-4)(3-5)}+$$

$$+7\frac{(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4+1)(4-2)(4-3)(4-5)}+6\frac{(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5+1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

при $x=x_3=4$:

$$L_5(4)=\overbrace{2\frac{(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)(-1-5)}}^{0}+\overbrace{3\frac{(4+1)(4-3)(4-4)(4-5)}{(2+1)(2-3)(2-4)(2-5)}}^{0}+\overbrace{6\frac{(4+1)(4-2)(4-4)(4-5)}{(3+1)(3-2)(3-4)(3-5)}}^{0}+$$

$$+7\frac{(4+1)(4-2)(4-3)(4-5)}{(4+1)(4-2)(4-3)(4-5)}+\underbrace{6\frac{(4+1)(4-2)(4-3)(4-4)}{(5+1)(5-2)(5-3)(5-4)}}_{0}=7=y_3$$

2. Даны узлы интерполяции (-2,4),(3,6),(4,7),(5,8). Записать интерполяционную формулу полнома Лагранжа, являющегося параболой. Указать, через какие точки проходит этот полином.

**Решение:**

Параболой (полиномом второго порядка ~$x^2$ )является полином, проходящий через 3 точки, например:

$$L_3(x)=4\frac{(x-3)(x-4)}{(-2-3)(-2-4)}+6\frac{(x+2)(x-4)}{(3+2)(3-4)}+7\frac{(x+2)(x-3)}{(4+2)(4-3)}$$

Он проходит через точки (-2,4),(3,6),(4,7). Например, для $x=x_1=3$:

$$L_3(3)=4\frac{(3-3)(3-4)}{(-2-3)(-2-4)}+6\frac{(3+2)(3-4)}{(3+2)(3-4)}+7\frac{(3+2)(3-3)}{(4+2)(4-3)}=6=y_1$$

3. Даны узлы интерполяции (-1,2),(2,3),(3,6). Записать формулы интерполяционных полиномов Лагранжа, проходящих через 2 первые и через 3 точки. Какова степень этих полиномов?

**Решение:**

Полином, проходящий через 2 точки, является полиномом 1-й степени (прямой):

$$L_2(x)=2\frac{(x-2)}{(-1-2)}+3\frac{(x+1)}{(2+1)}$$

Полином, проходящий через 3 точки, является полиномом 2-й степени (параболой):

$$L_3(x)=2\frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)}+3\frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)}+6\frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)}$$

4. Даны узлы интерполяции (-1,2),(0,1),(2,3),(4,4),(5,7). Записать интерполяционную формулу полиномов Лагранжа, проходящих через 3 и 4 первые точки. Будут ли оба полинома проходить через точку (4,4)?

**Решение:**

Полином, проходящий через 3 точки:

$$L_3(x)=2\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}+1\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}+3\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

Полином, проходящий через 4 точки:

$$L_4(x)=2\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-1-0)(-1-2)(-1-4)}+1\frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(0+1)(0-2)(0-4)}+3\frac{(x+1)(x-0)(x-4)}{(2+1)(2-0)(2-4)}+4\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(4+1)(4-0)(4-2)}$$ при

$x=x_3=4$:

$$L_3(4)=2\frac{(4-0)(4-2)}{(-1-0)(-1-2)}+1\frac{(4+1)(4-2)}{(0+1)(0-2)}+3\frac{(4+1)(4-0)}{(2+1)(2-0)}=\frac{31}{3}\neq y_3$$

Значит, этот полином не проходит через точку (4,4).

$$L_4(4) = 2\frac{(4-0)(4-2)(4-4)}{(-1-0)(-1-2)(-1-4)} + 1\frac{(4+1)(4-2)(4-4)}{(0+1)(0-2)(0-4)} + 3\frac{(4+1)(4-0)(4-4)}{(2+1)(2-0)(2-4)} + 4\frac{(4+1)(4-0)(4-2)}{(4+1)(4-0)(4-2)} = 4$$

Значит, этот полином проходит через точку (4,4).

## Аппроксимация

**Пример задания:**
Постановка задачи аппроксимации. Даны точки (1,3), (3,6), (4,4). Найти коэффициенты линейной аппроксимации
**Решение:**
Данные точки обозначим $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$, аппроксимирующую прямую $F(x)=a_0+a_1x$. Нужно найти коэффициенты прямой $a_0,a_1$ такие что сумма квадратов отклонений

$R=\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0+a_1x_i))^2$ была минимальной .

Сумма квадратов отклонений будет минимальна, если

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = -2\sum(y_i - (a_1x_i + a_0)) = -2\sum(y_i - a_1x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = -2\sum(y_i - (a_1x_i + a_0))x_i = -2\sum(y_ix_i - a_1x_i^2 - a_0x_i) = 0$$

$$\sum y_ix_i - a_1\sum x_i^2 - a_0\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - a_1\sum x_i - a_0n = 0$$

*Обозначим*

$$M_x = \sum x_i, M_y = \sum y_i, M_{xy} = \sum x_iy_i, M_{xx} = \sum x_i^2$$

Везде суммирование ведется по всем точкам i=1..n. Тогда для определения $a_0$ и $a_1$ получается

$$a_1M_{xx} + a_0M_x = M_{xy}$$

$$a_1M_x + a_0n = M_y$$

система уравнений :

Выражения для параметров имеют вид (приводим вывод)

$$a_1 = \frac{M_{xy}n - M_xM_y}{M_{xx}n - M_xM_x}, a_0 = \frac{M_{xx}M_y - M_xM_{xy}}{M_{xx}n - M_xM_x}$$

Найдем значения параметров для данных точек.

$M_x=1+3+4=8$; $M_{xx}=1^2+3^3+4^2=26$; $M_y=3+6+4=13$; $M_{xy}=1*3+3*6+4*4=37$; n=3

$$a_1 = \frac{37\cdot 3 - 8\cdot 13}{26\cdot 3 - 8\cdot 8} = 0.5 \qquad a_0 = \frac{26\cdot 13 - 8\cdot 37}{26\cdot 3 - 8\cdot 8} = 3$$

**Решение СЛАУ методом Гаусса**

1. Записать решение СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

**Решение:**

Прямой ход метода Гаусса

Преобразуем 2 и 3 уравнения так, чтобы коэффициенты при $x_1$ стали равны 0. Для этого будем использовать 1 уравнение.

1 уравнение разделим на $a_{11}$, умножим на $a_{21}$ и вычтем из второго уравнения. Т.е. (2)-(1)* $a_{21}/ a_{11}$ :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

$$-$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{9}{2}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2}$$

1 уравнение разделим на $a_{11}$, умножим на $a_{31}$ и вычтем из третьего уравнения. Т.е. (3)-(1)* $a_{31}/ a_{11}$ :

$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$-$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-4x_2 + 2x_3 = -6$$

Перепишем систему в преобразованном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ -4x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

Преобразуем 3 уравнение так, чтобы коэффициент при $x_2$ стал равен 0. Для этого будем использовать 2 уравнение.

2 уравнение разделим на $a_{22}$, умножим на $a_{32}$ и вычтем из третьего уравнения. Т.е. (3)-(2)* $a_{32}/ a_{22}$ :

$$-4x_2 + 2x_3 = -6$$

$$-$$

$$-4x_2 + 12x_3 = 4$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-10x_3 = -10$$

Перепишем систему в преобразованном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ \quad -10x_3 = -10 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов приведена к треугольному виду. Прямой ход метода Гаусса закончен.

Обратный ход метода Гаусса.
Найдем значения неизвестных:

$x_3 = -10/10 = 1$

$x_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot 1\right) / \left(-1/2\right) = 2$

$x_1 = (9 - 3 \cdot 2 - 1)/2 = 1$

2. Записать решение СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Записать решение СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

4. Записать решение СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$