

Задача 2. Решение задач интерполяции в редакторе электронных таблиц Calc

1. Часть 1 (обязательная). Решение задач интерполяции методом Лагранжа

Постановка задачи интерполяции

Часто приходится иметь дело с функциями, заданными таблично. При этом возникает необходимость найти значения функции для промежуточных аргументов. Для этого строят функцию, которая проходит через все или часть заданных точек и используют ее для нахождения значений функции в промежуточных точках.

В этом случае исходные точки называются узлами интерполяции, точка, в которой нужно найти значение функции – точкой интерполяции, функция, которую строят, называется интерполирующей функцией, способ ее нахождения- интерполяцией.

Таким образом, **постановка задачи интерполяции** формулируется так: Имеется набор значений (x_i, y_i) , $i=0,1,2,\dots,n$ - точек функции $y(x)$, называемых узлами интерполяции. Необходимо найти значение функции в точке интерполяции $x_{\text{инт}}$, причем это значение лежит на отрезке $x_{\text{инт}} \in [x_0, x_n]$

Ниже приведен **пример решения следующей задачи**:

Имеется набор значений зависимости величины y от переменной x :

x	0	0,1	0,2	0,4	0,6
y	5	5,3	5,5	6,3	6,7

Найти значение функции $y(x)$ в точке $x=0.175$

Построение узлов интерполяции на графике

Откройте новый документ Calc, запишите заголовок темы. Впишите в таблицу данные узлов интерполяции и постройте их на графике (см.рис.1). Таблица расположена горизонтально, поэтому при построении графика на втором шаге мастера диаграмм выберите пункт «Ряды данных в строках». Найдите для точек значки-«бантики», с ними хорошо видно положение узла.

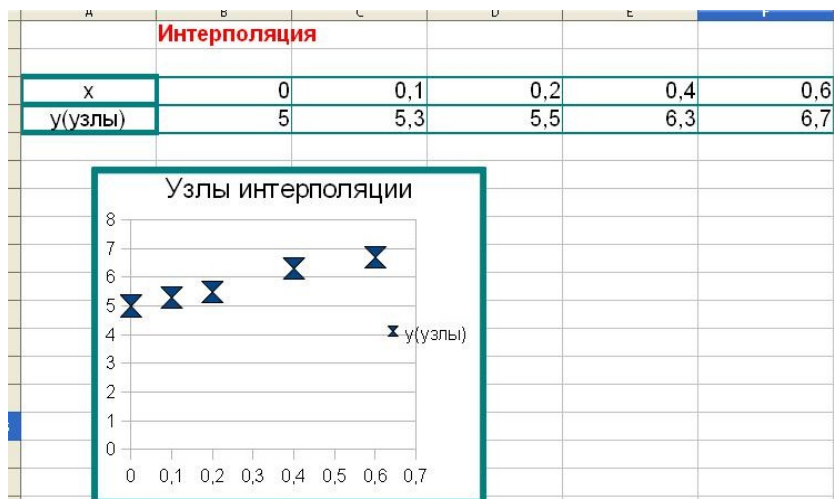


Рис.1. Построение графика с узлами интерполяции.

Интерполяции по трем точкам

1. Вписываем в документ заголовок «Интерполяция Лагранжа по 3м узлам».

2. С помощью редактора формул Math вписываем формулу полинома Лагранжа. Для этого выбираем в меню Вставка/Объект/Формула и в открывшемся окне редактора формул с помощью панели Выбор и клавиатуры или только клавиатуры набираем формулу полинома Лагранжа, проходящего через 3 узла (рис.2). Детали работы с редактором формул Math можно вспомнить, воспользовавшись пособием «[Пакет программ Open Office](#)», доступном на сайте факультета. Если панель «Элементы формулы» в открывшемся редакторе не видна, откройте ее с помощью меню Вид/Элементы формулы.

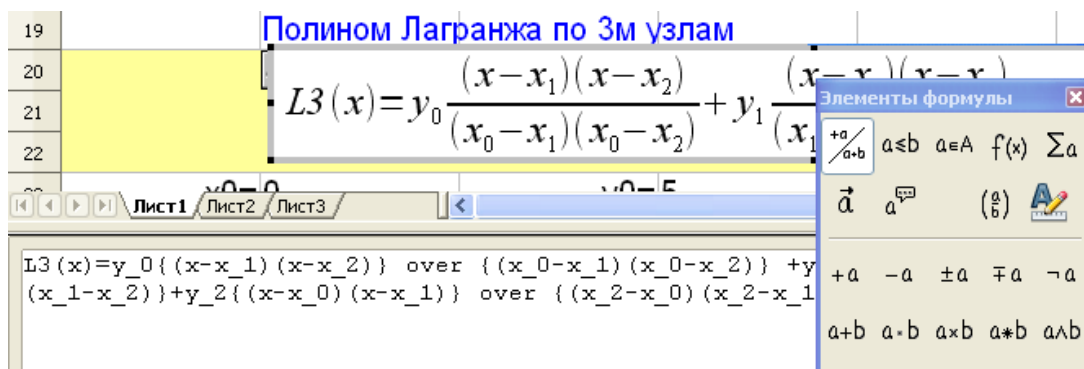


Рис.2. Набор формулы полинома Лагранжа.

3. Под формулой сформируйте таблицу узлов, через которые будет проходить полином. Внесите в нее значения выбранных для построения

полинома Лагранжа узлов (возьмем первые 3 узла из пяти). Чтобы их значения было легко поменять, вносите значения как ссылки на ячейки таблицы данных, построенной в п.1. (так, как показано на рис.3 для y_2):

$x_0=0$	$y_0=5$
$x_1=0,1$	$y_1=5,3$
$x_2=0,2$	$y_2=D4$

Рис.3. Таблица узлов, через которые проходит полином Лагранжа

4. Вычислите таблицу для полинома Лагранжа, проходящего через 3 узла. Для этого

- Наберите заголовок таблицы (см. рис 5).
- выберите диапазон значений независимой переменной x немного больше, чем диапазон значений x данных задачи (т.е. начальное значение $x < x_0$, а конечное значение $x > x_n$) и шаг по x так, чтобы в таблице было 15-20 точек (см. рис 5);
- для упрощения набора рассчитайте отдельно слагаемые полинома. Не путайте относительные и абсолютные ссылки. Например, формула первого слагаемого может быть набрана так, как показано на рис.4.

	A	B	C	D	E	F
23	$x_0=0$		$y_0=5$			
24	$x_1=0,1$		$y_1=5,3$			
25	$x_2=0,2$		$y_2=5,5$			
26						
27	x	1 слагаемое	2 слагаемое	3 слагаемое	$L_3(x)$	
28	-0,05	$=\$D\$23*(A28-\$B\$24)*(\$B\$23-\$B\$25)/(\$B\$23-\$B\$24)/(\$B\$23-\$B\$25)$				

Рис.4. Расчет 1-го слагаемого полинома.

- Проверьте получившиеся значения слагаемых. Для этого нужно понимать, что если в полином подставить $x = x_0$, то первое слагаемое будет равно y_0 , второе и третье - равны нулю. Подумайте, какие значения имеют слагаемые в других узлах, взятых для построения полинома.
- затем найдите значение полинома как сумму трёх слагаемых (см. рис 5).

27	x	1 слагаемое	2 слагаемое	3 слагаемое	L3(x)
28	-0,05	9,38	-6,63	2,06	4,81
29	0	5	0	0	5
30	0,05	1,88	3,98	-0,69	5,16
31	0,1	0	5,3	0	5,3
32	0,15	-0,63	3,98	2,06	5,41
33	0,2	0	0	5,5	5,5
34	0,25	1,88	-6,63	10,31	5,56
35	0,3	5	-15,9	16,5	5,6
36	0,35	9,38	-27,83	24,06	5,61
37	0,4	15	-42,4	33	5,6
38	0,45	21,88	-59,63	43,31	5,56
39	0,5	30	-79,5	55	5,5
40	0,55	39,38	-102,03	68,06	5,41
41	0,6	50	-127,2	82,5	5,3
42	0,65	61,88	-155,03	98,31	5,16
43	0,7	75	-185,5	115,5	=SUM(B43:D43)

Рис.5. Таблица для полинома Лагранжа, проходящего через 3 узла.

5. Постройте на одном графике данные задачи (узлы интерполяции) и полином Лагранжа, проходящий через 3 узла. Снова постройте график узлов интерполяции и добавьте в него график $L_3(x)$ (см.рис.6). Проследите, чтобы масштаб на графике остался таким же, как был при построении одних узлов. Заголовок графика и содержание легенды должны быть такими же, как на рис.6.

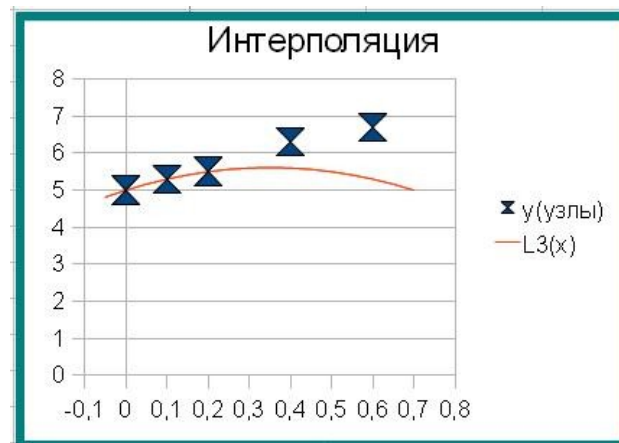


Рис.6. Узлы интерполяции и полином Лагранжа

6. Найдите значения функции в точке интерполяции $x=0.175$. Для этого в таблице полинома исправьте ближайшее к 0.175 значение x на нужное (либо 0.15 , либо 0.2). Если все сделано верно, значение полинома

автоматически пересчитается — это и будет приближенное искомое значение функции.

Интерполяции по двум точкам

Повторите пп.1-6 из предыдущего раздела для полинома Лагранжа $L_2(x)$, проходящего через 2 узла. Сделайте для него отдельную таблицу узлов, а линию постройте на том же графике, что и $L_3(x)$ (см.рис.7).

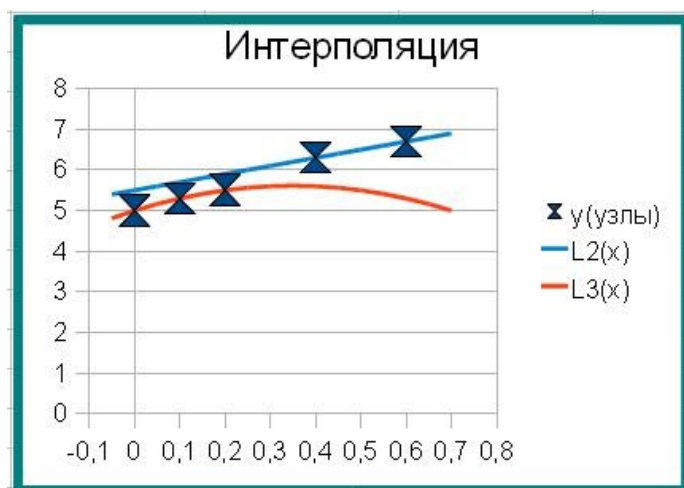


Рис.7. Узлы интерполяции и полиномы Лагранжа

Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ — электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- Приведена таблица узлов индивидуальной задачи;
- В редакторе формул набрана формула полинома Лагранжа, проходящего через 3 узла
- Рассчитана таблица значений полинома Лагранжа, проходящего через 3 узла, в том числе рассчитаны его значения в точках интерполяции;
- В редакторе формул набрана формула полинома Лагранжа, проходящего через 2 узла
- Рассчитана таблица значений полинома Лагранжа, проходящего через 2 узла, в том числе рассчитаны его значения в точках интерполяции;
- Построен график, на котором изображены узлы интерполяции, полиномы Лагранжа, проходящие через 2 и 3 узла.
- С помощью полиномов Лагранжа, проходящих через 2 и 3 узла, найдено приближенное значение функции в точке интерполяции.

Для зачета по практической части студент должен продемонстрировать:

- понимание смысла и взаимосвязи частей документа;
- умение перестраивать полиномы по другим наборам узлов интерполяции из имеющихся
- умение находить значение функции в точке интерполяции численно.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 1.

- 📁👉 В чем состоит задача интерполяции (постановка задачи интерполяции)?
- 📄👉 Основное свойство интерполяционного полинома?
- 📄👉 Как доказать, что данная интерполяционная функция проходит через заданные точки?
- 📄👉 Запишите полином Лагранжа, проходящий через две, три, четыре,... десять точек. Сколько слагаемых будет в каждом случае, какое количество скобок в числителе и знаменателе?

Часть 2 (дополнительная). Решение задач интерполяции методом Ньютона.

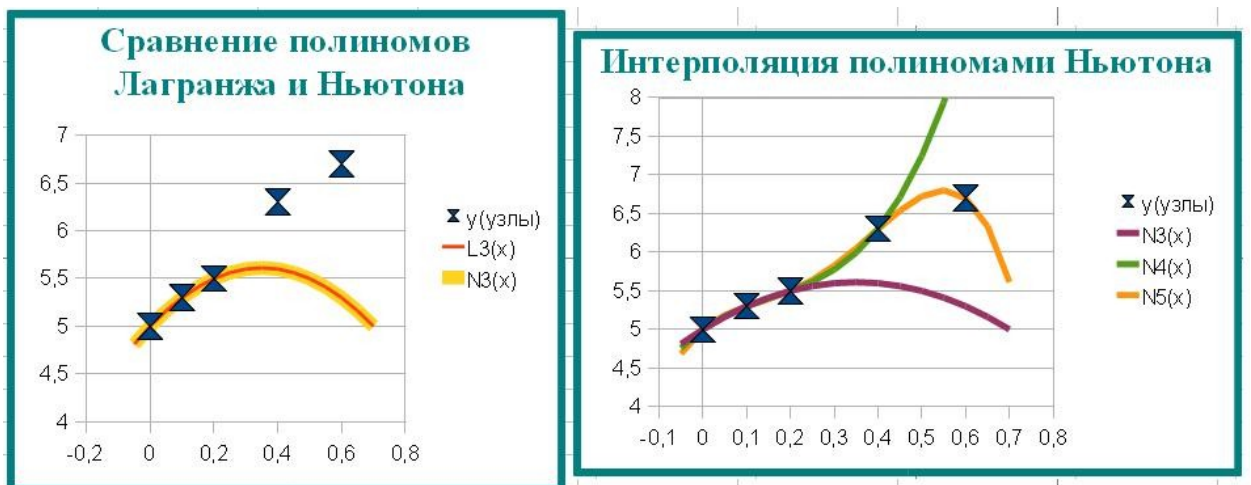
Рассчитываем разделенные разности. Удобно разместить их в таблице следующим образом

72	x	y	PP 1порядка	PP 2порядка	PP 3порядка	PP 4порядка
73	0	5	3	-5	29,17	$= (E74 - E73) / (A77 - A73)$
74	0,1	5,3	2	6,67	-23,33	
75	0,2	5,5	4	-5		
76	0,4	6,3	2			
77	0,6	6,7				

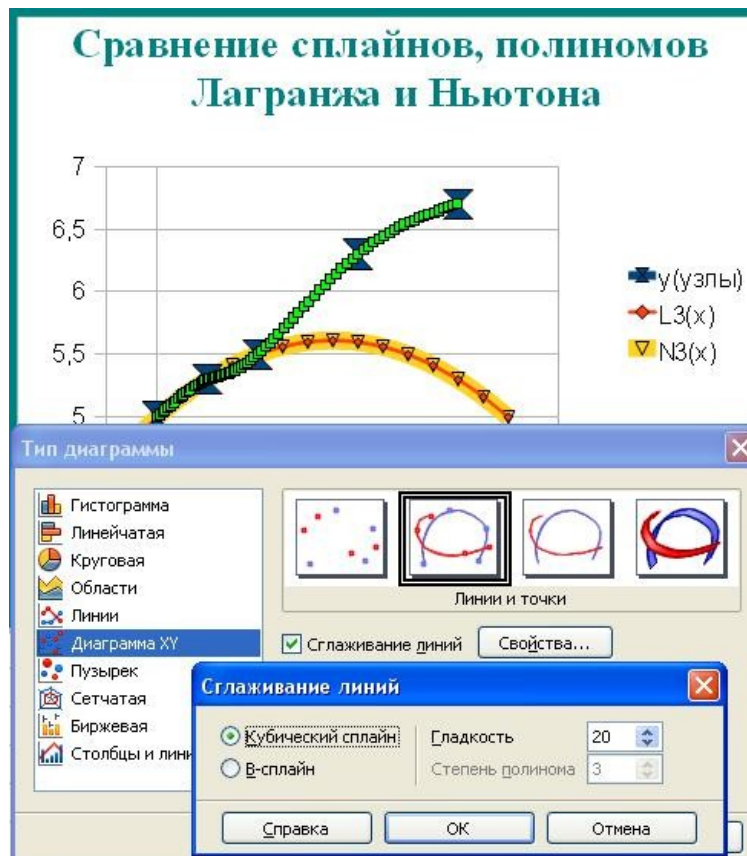
Рассчитываем таблицы полиномов Ньютона. Удобно использовать то, что формулы полиномов с соседними номерами, отличаются на одно слагаемое.

	A	B	C	D	E
78					
79	x	N2(x)	N3(x)	N4(x)	N5(x)
80	-0,05	4,85	$=B80 + D80 * (A80 - A73) * (A80 - A74)$		
81	0	5	5	5	5
82	0,05	5,15	5,16	5,17	5,18
83	0,1	5,3	5,3	5,3	5,3
84	0,15	5,45	5,41	5,4	5,39
85	0,2	5,6	5,5	5,5	5,5
86	0,25	5,75	5,56	5,62	5,64

Сравните полиномы Лагранжа и Ньютона, построенные на основе одних и тех же узлов и полиномы Ньютона, построенные с помощью разных наборов узлов.



В режиме форматирования графика выделите узлы интерполяции и измените тип диаграммы, соединив узлы кубическими сплайнами. Для этого выберите изображение графика с помощью линий и точек, поставьте флажок Сглаживание линий и, нажав на кнопку Свойства, убедитесь, что сглаживание проводится кубическим сплайном.



Требования к защите 2й части индивидуальной задачи

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором:






- В продолжение 1й части задачи, рассчитаны разделенные разности до максимального возможного для данных задачи порядка;
- На том же интервале, что и полином Лагранжа, рассчитаны значения полинома Ньютона по 2, 3, ... n узлам (где n – число данных в задаче узлов) и построены их графики.
- На одном графике построены полиномы Лагранжа и Ньютона по одному набору из 3х узлов.

Для зачета по практической части студент должен продемонстрировать:

- понимание смысла и взаимосвязи частей документа;
- умение перестраивать полиномы по другим наборам узлов интерполяции из имеющихся
- умение находить значение функции в точке интерполяции численно.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 2.

-  Запишите разделенные разности первого, второго, третьего порядков.
-  Запишите полином Ньютона, проходящий через первые 2, 3, 4 заданные точки, через 2,3,4 последние из заданных точек. Будет ли при этом отличаться значение функции в точке интерполяции?
-  Отличаются ли полиномы Лагранжа и Ньютона, построенные с помощью одного набора точек? Обоснуйте ответ. Рассмотрите пример полиномов, проходящих через 2,3 точки: Какого вида кривой они являются? Сколько кривых такого типа можно провести через данное количество точек?
-  Каким образом строится кубический сплайн через заданные точки?
-  Чем сплайн отличается от интерполяционного полинома Лагранжа?