

Задача 3. Решение задач аппроксимации в редакторе электронных таблиц Calc

содержание

1. Часть 1 (обязательная). Нахождение параметров нелинейной функции с помощью линейной аппроксимации

Постановка задачи аппроксимации

Предположим, что измерена экспериментально зависимость между некоторой переменной x и зависящей от нее величиной y . Всего имеется n пар значений (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$. Из теории известно, что эти две величины связаны аналитической зависимостью $F(x, a_1, \dots, a_m)$, где a_1, \dots, a_m -параметры (числа, которые нужно подобрать). Например, если мы измеряем зависимость тока от напряжения на участке цепи, то из теории известно, что зависимость эта – прямая, а параметром является сопротивление данного участка цепи.

Необходимо найти такие значения параметров функции $F(x, a_1, \dots, a_m)$, чтобы она наилучшим образом описывала полученную зависимость $y_i(x_i)$. Для этого требуют, чтобы сумма квадратов отклонений функции $F(x_i, a_1, \dots, a_m)$, в точках x_i от значений y_i была минимальна, т.е.

$$R = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_1, \dots, a_m))^2 \rightarrow \min$$

Такой подход называется аппроксимацией, а $F(x)$ - аппроксимирующей функцией.

В случае линейной регрессии $F(x)$ ищут в виде $F(x)=a_0+a_1x$, для поиска минимума функции $R(a_0, a_1)$ приравнивают ее производные к нулю и выводят уравнения для нахождения параметров.

В случае нелинейной функции $F(x, a_1, \dots, a_m)$, найти параметры намного сложнее. Поэтому если это возможно, нелинейную функцию сводят к линейной, находят параметры линейной функции, а затем их используют для нахождения параметров нелинейной функции.

Аппроксимация нелинейных функций с помощью линейной регрессии.

В рассматриваемом примере $F(x)=y=k \cdot x^m$. Данную зависимость можно свести к линейной с помощью логарифмирования:

$$\ln(y)=\ln(k)+m \cdot \ln(x).$$

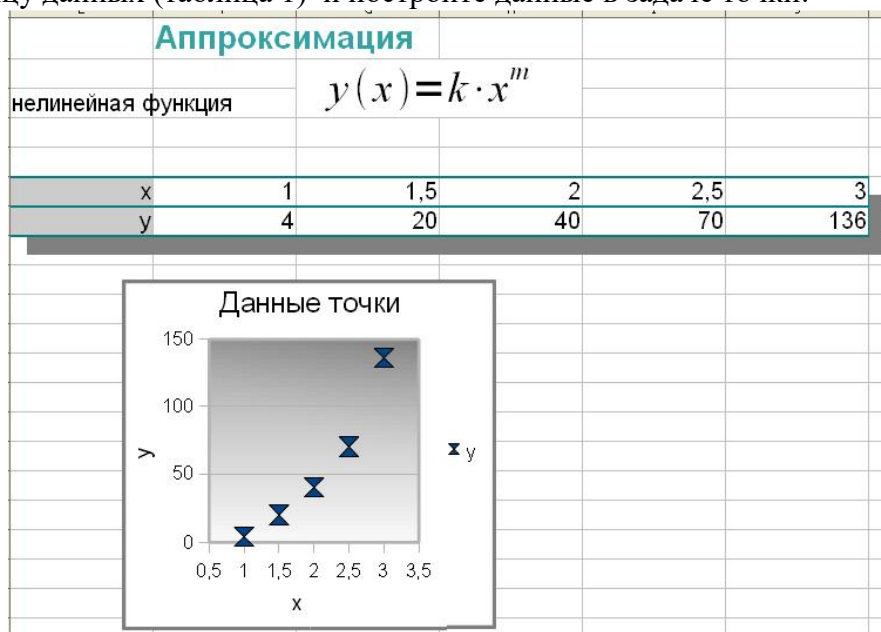
Обозначим $v=\ln(y)$, $u=\ln(x)$, $a_0=\ln(k)$, $a_1=m$. (*)

Тогда $v=a_0+a_1u$ –линейная функция и ее параметры можно найти с помощью линейной регрессии. Параметры исходной нелинейной функции можно найти с помощью обратных преобразований(из (*)):

$$m = a_1, \quad k = e^{a_0}$$

Преобразование к линейной функции и нахождение параметров

1. Откройте документ Calc, введите формулу данной в задаче нелинейной функции, таблицу данных (таблица 1) и постройте данные в задаче точки:



2. Выведите преобразования, с помощью которых данная в вашей задаче нелинейная функция, может быть сведена к линейной $v=a_0+a_1 \cdot u$ (сверьтесь с таблицей на стр.43 пособия). Впишите нужные преобразования и замены переменных в документ.

Преобразование к линейной зависимости

$$\ln(y) = \ln(k) + m \cdot \ln(x)$$

$$v = \ln(y) \quad u = \ln(x)$$

$$a_0 = \ln(k) \quad a_1 = m$$

3. Пересчитайте таблицу данных согласно полученной замене переменных и запишите преобразованные данные в таблицу 2

$u=\ln(x)$	0	0,41	0,69	0,92	1,1
$v=\ln(y)$	1,39	3	3,69	4,25	4,91

4. Организуйте расчет коэффициентов M_x, M_y, M_{xx}, M_{xy} системы линейных уравнений для нахождения параметров и, затем расчет самих параметров a_0 и a_1 (Формулы приведены ниже – их в документе набирать в редакторе формул не нужно).

Обозначим

$$M_x = \sum x_i, M_y = \sum y_i, M_{xy} = \sum x_i y_i, M_{xx} = \sum x_i^2$$

Тогда для определения a_0 и a_1 получается система уравнений:

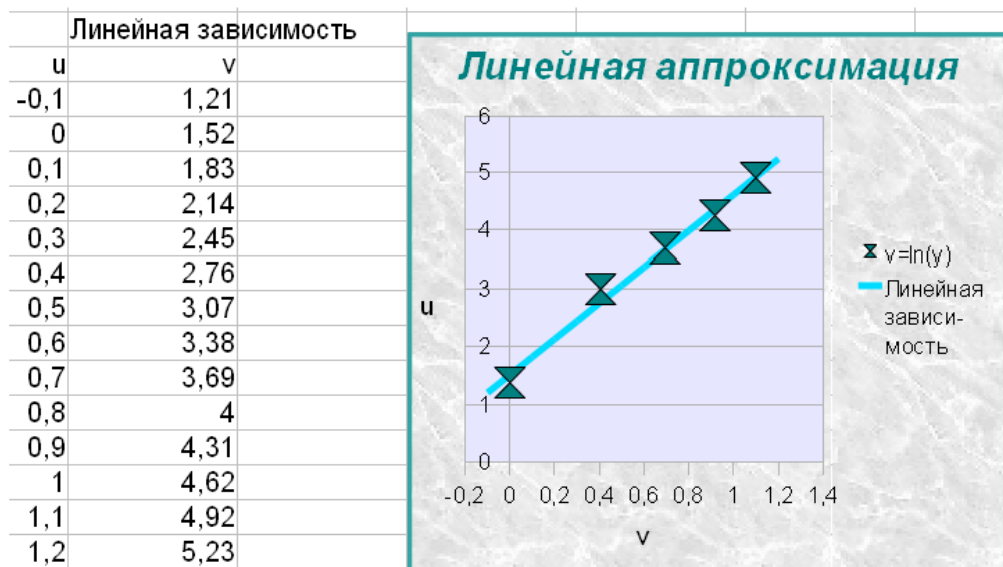
$$a_1 M_{xx} + a_0 M_x = M_{xy}$$

$$a_1 M_x + a_0 n = M_y$$

Выражения для параметров имеют вид:

$$a_1 = \frac{M_{xy}n - M_x M_y}{M_{xx}n - M_x^2}, a_0 = \frac{M_{xx}M_y - M_x M_{xy}}{M_{xx}n - M_x^2}$$

5. С помощью вычисленных коэффициентов рассчитайте таблицу функции $v=a_0+a_1*u$ и постройте ее график вместе с преобразованными данными (из таблицы 2). Обратите внимание на диапазон изменения переменной u – он должен соответствовать таблице 2.



Как, используя график, оценить, правильно ли найдены параметры?

Нахождение параметров нелинейной функции

6. С помощью редактора формул запишите в документ преобразования, необходимые для расчета параметров данной нелинейной функции. Рассчитайте параметры исходной нелинейной функции, сделав такие преобразования.

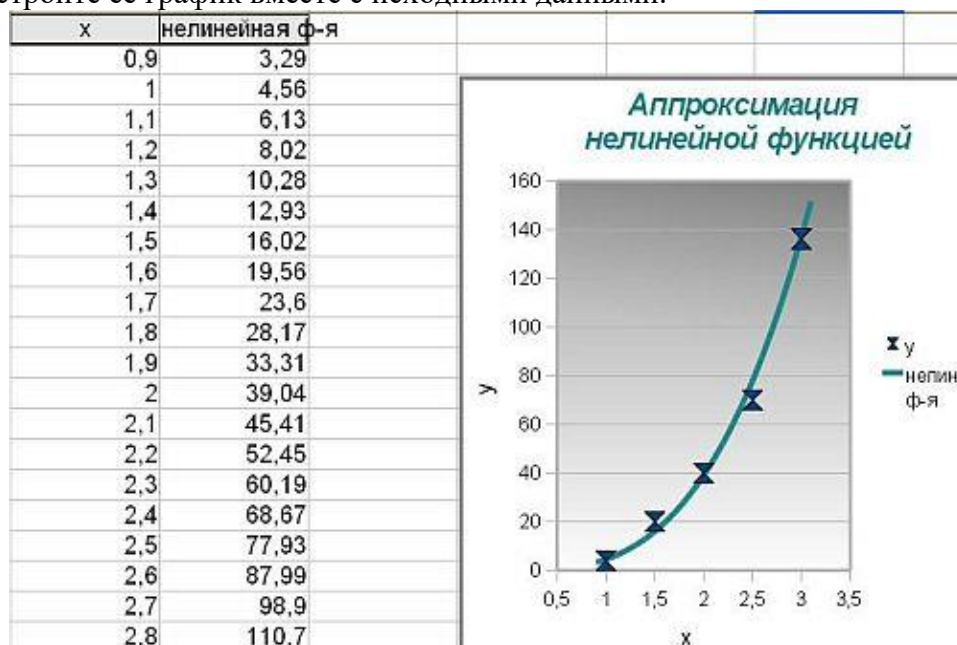
Возвращаемся к нелинейной зависимости

$$m = a_1 \quad k = e^{a_0}$$

$$m = 3,1$$

$$k = 4,56$$

7. С помощью найденных параметров, рассчитайте таблицу нелинейной функции и постройте ее график вместе с исходными данными.



Оцените правильность решения задачи. Хорошо ли подобраны параметры? Из чего это можно понять?

Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- Набрана формула данной в задаче нелинейной функции
- Приведена таблица точек и построен график, на котором представлены все данные точки;
- Указаны преобразования (набраны формулы), необходимые для приведения данной нелинейной функции к линейному виду;
- Значения точек (x_i, y_i) нелинейной функции пересчитаны в точки (u_i, v_i) линейной функции и занесены в таблицу 2
- Рассчитана таблица линейной функции и она построена на графике вместе с данными таблицы 2.
- Рассчитаны параметры и таблица нелинейной функции, данной в задаче, и она построена на графике вместе с данными таблицы 1.

Для зачета по практической части студент должен продемонстрировать:

- понимание смысла расчетов и взаимосвязи частей документа;
- умение продемонстрировать переход от нелинейной функции к линейной
- умение по полученному графику оценить, верно ли найдены параметры аппроксимирующей функции.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 1.

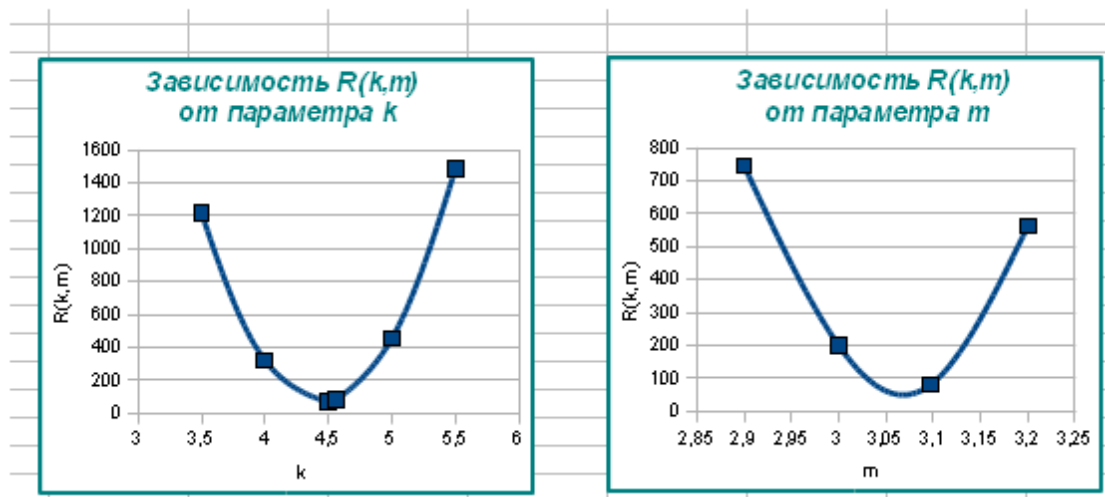
1. В чем состоит задача аппроксимации (постановка задачи аппроксимации)? Почему этот метод называют методом наименьших квадратов?
2. Поясните, как данную в Вашей задаче нелинейную аппроксимирующую функцию преобразовать в линейную? Как преобразуются при этом параметры? Используйте обозначения из сформированного Вами электронного документа.
3. Как теоретически найти параметры линейной аппроксимирующей функции? Выведите необходимые уравнения и формулы для коэффициентов аппроксимации.
4. Как найти параметры исходной нелинейной функции, зная параметры линейной функции?

Часть 2 (дополнительная). Изучение вида функции $R(a_0, a_1)$.

Изучение вида функции $R(a_0, a_1)$.

8. С помощью редактора формул наберите еще раз формулу нелинейной функции и формулу для расчета функции $R(k, m)$.
9. Рассчитайте и постройте зависимость функции $R(k, m)$ от параметров в окрестности найденных значений параметров): сначала зависимость $R(k)$ при m равном значению, рассчитанному в части 1, и, аналогично, $R(m)$. Каков смысл этих графиков? (См. рис. на следующей странице.)
10. Если найденные значения параметров не очень хороши, обязательно подберите расчетные значения k и m , чтобы на графиках был виден минимум функции $R(k, m)$.

Анализ функции $R(k,m)$	
$R(k, m) = \sum_{i=1}^n (y_i - k \cdot x_i^m)^2$	
$k_0 =$	4,56
$m_0 =$	3,1



Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором после вычисления параметров нелинейной функции (часть 1) набрана формула для расчета $R(a_0, a_1)$, рассчитана зависимость $R(a_0)$ при a_1 равном значению, рассчитанному в части 1, и, аналогично, $R(a_1)$.

Для зачета по практической части студент должен продемонстрировать:

- понимание смысла расчетов и взаимосвязи частей документа;
- умение продемонстрировать, что полученные в части 1 параметры, являются, практически, наилучшими.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 2.

1. Как по виду функции $R(a_0, a_1)$ установить, что найденные параметры аппроксимирующей функции являются наилучшими?

2. Что такое нелинейный регрессионный анализ? Из каких соображений можно найти параметры нелинейной аппроксимирующей функции? Запишите необходимые уравнения в общем виде и для функции Вашей задачи.