Задача 4. Численное интегрирование в редакторе электронных таблиц Calc

Содержание

Часть 1 (обязательная). Численное интегрирование методами прямоугольников и трапеций

Математическая постановка задачи

Дан определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

где a, b - конечны, f(x) - непрерывна на [a, b]. Необходимо найти его значение.

При решении практических задач часто бывает, что интеграл неудобно или невозможно взять аналитически: он может не выражаться в элементарных функциях, подынтегральная функция может быть задана в виде таблицы и пр. В таких случаях применяют методы численного интегрирования.

Известно, что определенный интеграл численно равен значению площади фигуры, ограниченной подынтегральной функцией, осью x, прямыми x=a и x=b. Общий подход к вычислению интеграла численными методами, сводится к нахождению этой площади.

Интеграл как решение физической задачи

Многие физические задачи приводят к интегрированию. Скорее всего, и в задаче для самостоятельного решения вам потребуется сначала вывести интеграл. Рассмотрим пример такой задачи.

Задача. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка ρ.

В результате рассмотрения задачи (см. файл ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ_Краткая теория.doc) можно получить, что искомая работа равна:

$$A = \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H-h)^2 h dh$$

Из некоторых соображений найдем работу, которую нужно совершить, чтобы насыпать кучу до половины высоты, то есть в качестве верхнего предела возьмем H/2.

$$A = \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^{H/2} (H-h)^2 h dh$$

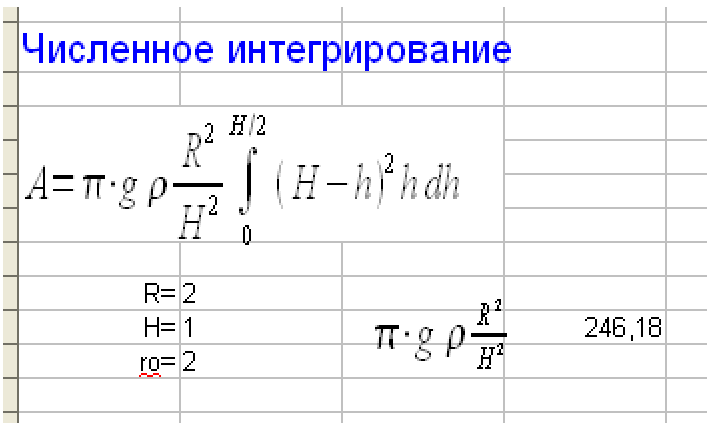
Возьмем интеграл аналитически:

$$A = \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^{H/2} (H-h)^2 h dh = \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^{H/2} (H^2 h - 2Hh^2 + h^3) dh =$$

$$= \pi \cdot g\rho \frac{R^2}{H^2} \left[H^2 \cdot \frac{h^2}{2} - 2H \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4} \right] \Big|_0^{H/2} = \pi \cdot g\rho \cdot \frac{11}{16 \cdot 12} R^2 H^2$$

Оформление задачи в редакторе электронных таблиц Calc

1. Откройте новый документ редактора электронных таблиц Calc. С помощью редактора формул впишите в документ интеграл, который нужно найти. Выпишите значения известных величин, рассчитайте константу, которую можно вынести за интеграл (см.рис. ниже).



2. Проинтегрируйте и вычислите значение интеграла точно (если это возможно):

$$A=\pi\cdot g\,\rho\frac{R^2}{H^2}\cdot\left[\frac{H^2\cdot h^2}{2}-2\,H\cdot\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{4}\right](от\,0\,до\,H/2)=\pi\cdot g\,\rho\cdot\frac{11}{16}\cdot\frac{R^2\cdot H^2}{12}$$

Аналитическое значение	14,103833

Численное интегрирование методами прямоугольников и трапеций

3. В данных численных методах подход к вычислению I состоит в том, что отрезок [a, b] разбивают множество меньших интервалов. Разобьем [a, b] на n равных частей, таким образом, определим (n+1) точку. Число разбиений n выбирают достаточно большим.

$$h=\frac{b-a}{n};\quad x_0=a;\quad x_i=a+i*h\;;\quad x_n=b$$

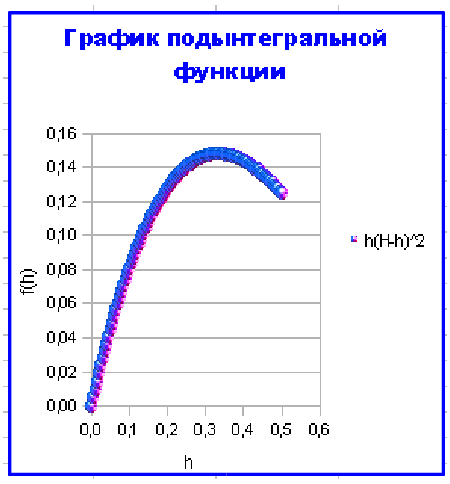
h-шаг интегрирования (в документе Calc будем обозначать его dh), соответствующие значения функции будем обозначать $y_i=f(x_i)$.

Рассчитаем таблицу подынтегральной функции данной задачи. Разобьем отрезок интегрирования на n=100 частей, рассчитаем шаг dh=(b-a)/2 (где a-нижний предел интегрирования, a b-верхний). Заполним таблицу (см.рис.).

	n=	100
	dh=	0,01
i	h	h(H-h)^2
0	0,000000	0,000000
1	0,005000	0,004950
2	0,010000	0,009801
3	0,015000	0,014553
4	0,020000	0,019208
5	0,025000	0,023766
6	0,030000	0,028227
7	0,035000	0,032593
8	0,040000	0,036864
9	0,045000	0,041041
10	0,050000	0,045125

В данном случае i- номер точки, h-значение независимой переменной в данной точке (соответствует x_i в схеме метода прямоугольников слева), h(H-h)^2 – значение подынтегральной функции (соответствует y_i в схеме метода прямоугольников слева). Первым значением во второй колонке должен быть нижний предел интегрирования (для рассматриваемой задачи x_0=a=0), а последним – верхний предел (для рассматриваемой задачи x_{100}=b=H/2).

4. Построим график подынтегральной функции, чтобы убедиться, что она гладкая и не терпит разрывов на отрезке интегрирования.



5. Организуем таблицу для значений интеграла, вычисленных различными методами, и перенесем туда уже подсчитанное аналитическое значение.

интеграл	n=	100	50	10
прямоугольники слева				
прямоугольники справа				
трапеции				
аналитически		14,103833		

Рассчитаем значение интеграла различными методами. Обратите внимание, что методы прямоугольников слева и справа отличаются лишь пределами суммирования.

В методе прямоугольников криволинейную трапецию, ограниченную функцией f(x) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменяют на прямоугольник.

В методе прямоугольников слева

$$I_л = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

В методе прямоугольников справа

$$I_{np} = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Поэтому, получить значение интеграла можно, просуммировав нужные значения подынтегральной функции из таблицы и умножив эту сумму на шаг dh и на константу, которую вынесли за интеграл (в данном случае $\pi g\rho\frac{R^2}{H^2}$) – см. рис. ниже. Если подынтегральная функция в точках a и b (пределах интегрирования) имеет одинаковые значения, то значения, полученные в методах прямоугольников слева и справа, также будут одинаковы.

94	0,470000	0,132023	
95	0,475000	0,130922	
96	0,480000	0,129792	
97	0,485000	0,128634	
98	0,490000	0,127449	
99	0,495000	0,126237	
100	0,500000	0,125000	
интеграл	**n=**	**100**	**50**
прямоугольники слева		=E8*C15*SUM(C18:C117)	
прямоугольники справа			
трапеции			
аналитически		14,103833	

6. Найдем интеграл методом трапеций. В этом методе

$$I=\sum_{i=0}^{n-1} dh\frac{y_i+y_{i+1}}{2}=\frac{dh}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i+\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(dh\sum_{i=0}^{n-1} y_i+dh\sum_{i=1}^{n} y_i\right)=\frac{1}{2}\left(I_л+I_{пр}\right)$$

То есть является полусуммой значений, полученных методами прямоугольников слева и справа. Найдите это значение и запишите в таблицу.

7. Действуя аналогично описанному в пп.3,5,6, вычислите значение шага интегрирования, таблицы подынтегральной функции и найдите значение интеграла при разбиении отрезка интегрирования на n=50 и n=10 частей и впишите в таблицу.

интеграл	**n=**	**100**	**50**	**10**
прямоугольники слева		14,026262	13,947409	13,270425
прямоугольники справа		14,180122	14,255129	14,809025
трапеции		14,103192	14,101269	14,039725
аналитически		14,103833	14,103833	14,103833

8. Оценим погрешность численного интегрирования. Эта погрешность легко вычисляется как модуль разности между аналитическим и численным значением интеграла, если аналитическое значение известно. Если же оно неизвестно (обычно именно поэтому используется численное интегрирование), погрешность можно оценить как модуль разности между численным значением интеграла с шагом dh/2 и численным значением интеграла с шагом dh.

Оценка погрешности для метода прямоугольников слева (n=50):			
	сравнение с аналитическим значением I(analit)-I(chisl)		
	R=	0,16	
	сравнение с меньшим шагом I(n=100)-I(n=50)		
	R=	0,08	

Оцените значение погрешности всех методов для n=50 разбиений.

Требования к защите

При защите задачи студент должен

1. продемонстрировать вывод интеграла – решения индивидуальной задачи (в тетради выполнить необходимые чертежи и вывод формул) и найти его значение аналитически (если это возможно).
2. продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- В редакторе формул набрано выражение для данного интеграла, в ячейках таблицы содержатся используемые в задаче константы, вычислен множитель, вынесенный за интеграл;
- Построен график подынтегральной функции;
- Вычислены значение шага интегрирования, таблицы подынтегральной функции и значение интеграла методами трапеций, прямоугольников слева и справа при разбиении отрезка интегрирования на n=100,50,10 частей;
- Двумя способами рассчитана погрешность численного интегрирования каждого метода для n=50 разбиений.

Для зачета по практической части студент должен продемонстрировать:

- понимание смысла расчетов и взаимосвязи частей документа;
- умение рассчитать значение интеграла методами трапеций, прямоугольников слева и справа для любого числа разбиений;
- умение сравнить точность разных методов численного интегрирования.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 1.

1. Постановка задачи численного интегрирования. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Методы прямоугольников слева и справа: формулы, геометрическая интерпретация, ошибка метода, сходство и различие двух методов. (см. файл ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ_Краткая теория.doc)
3. Метод трапеций: формула, геометрическая интерпретация, ошибка метода,
4. Запись схемы численного интегрирования методами трапеций, прямоугольников слева и справа для конкретного интеграла. (см. примеры в файле ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ_Примеры численных схем.doc).

Часть 2 (дополнительная). Численное интегрирование методами Симпсона и Гаусса

Метод Симпсона

В методе Симпсона площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью фигуры, ограниченной сверху параболой. Так как параболу однозначно можно провести только через три точки, для расчета каждой малой площади S_i берутся два отрезка: $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, а суммирование ведется с шагом 2:

$$I \approx \sum_{i=1,шаг2}^{n-1} S_i = \sum_{i=1,шаг2}^{n-1} h\frac{y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}}{3}$$

Поэтому для вычисления одной малой площади S_i, необходимо подсчитать три значения подынтегральной функции в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Будем рассчитывать значения интеграла при n=10 разбиениях.

	n=	10		Метод Симпсона	
	dh=	0,05			
i	h	y(i-1)	y(i)	y(i+1)	Si
0	0				
1	0,05	0	0,05	0,08	4,3583E-003
2	0,1				
3	0,15	0,08	0,11	0,13	1,0708E-002
4	0,2				
5	0,25	0,13	0,14	0,15	1,3958E-002
6	0,3				
7	0,35	0,15	0,15	0,14	1,4708E-002
8	0,4				
9	0,45	0,14	0,14	0,13	1,3558E-002
10	0,5				
		Метод Симпсона			14,103833

Обратите внимание на точность результата, для этого сравните его с точным значением интеграла.

Метод Гаусса

В методе Гаусса интеграл расчитывается с помощью специальных точек (нулей полиномов Лежандра – см. лекции). Для расчета интеграла необходимо от интервала [a,b] перейти к интервалу [-1,1]. Произведите этот переход и, с помощью редактора формул, впишите новый интеграл в документ:

$$A=\pi\cdot g\,\rho_0\frac{R^2}{H^2}\int_0^{H/2}(H-h)^2 h\,dh=\pi\cdot g\,\rho_0\frac{R^2\cdot H^2}{256}\int_{-1}^{1}(3-\mu)^2(\mu-1)d\,\mu$$

Выпишите значения специальных точек и коэффициентов и подсчитайте значение интеграла для N=1,2,3,4.

N	мю(i)	A_i
1	0	2
2	-0,57735027	1
	0,57735027	1
3	-0,77459667	0,55555560
	0,00000000	0,88888889
	0,77459667	0,55555560
4	-0,86113631	0,34785484
	-0,33998104	0,65214516
	0,33998104	0,65214516
	0,86113631	0,34785484

N	int
1	17,309250
2	=E10*((3-K139)^2*(K139+1)+(3-K140)^2*(K140+1))/256
3	14,103834
4	14,103833

Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать – электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- Рассчитана таблица значений подынтегральной функции, площадей S_i, интеграла для метода Симпсона;
- С помощью редактора формул вписан интеграл в пределах [-1,1], к которому нужно перейти для применения метода Гаусса (вывод этого нового интеграла оформить в тетради);
- Имеется таблица специальных точек и коэффициентов метода Гаусса, рассчитаны значения интеграла для N=1,2,3,4.

Контрольные вопросы к части 2.

1. Метод Симпсона: формула, геометрическая интерпретация, ошибка метода, вывод формулы для S_i.
2. Полиномы Лежандра: получение с помощью рекуррентной формулы, нахождение нулей полиномов.
3. Метод Гаусса: приведение интеграла к новым пределам, формула для коэффициентов A_i, формула интегрирования. Для каких функции отдельные формулы метода Гаусса дают совершенно верный результат?