Задача 6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в редакторе электронных таблиц Calc

Содержание

Часть 1 (обязательная). Решение ОДУ методом Эйлера. 1

Постановка задачи 1

Получение обыкновенного дифференциального уравнения 1

Схема Эйлера для ОДУ 1-го порядка 2

Схема Эйлера для ОДУ 2-го порядка 2

Схема метода Рунге-Кутта для ОДУ 1-го порядка 3

Численное решение ОДУ методами Эйлера и Рунге-Кутта 3

Требования к защите 6

Контрольные вопросы к части 1. 7

Часть 2 (дополнительная). Сравнение решений ОДУ разными методами. 7

Контрольные вопросы к части 2. 8

Часть 1 (обязательная). Решение ОДУ методом Эйлера.

Постановка задачи

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-того порядка имеет вид:

$$F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)})=0$$

где t – независимая переменная, x(t) – функция, которую нужно найти,

$x^{(n)} \equiv \dfrac{d^n x}{dt^n}$ - n-тая производная искомой функции. Наивысший порядок n, входящий в уравнение производной называется порядком ОДУ.

Решением ОДУ является функция x(t), которая, при подстановке в уравнение, превращает его в тождество.

Для однозначного нахождения решения x(t), необходимо задать n дополнительных условий. Существует два типа дополнительных условий, при этом получаются задачи двух разных типов:

1). **Задача Коши:** Все условия заданы в одной точке t_0. Они называются начальными условиями, а точка t_0 - начальной точкой. Например:

$x(t_0)=x_0$; $x'(t_0)=z_1$, ………, $x^{(n-1)}(t_0)=z_{n-1}$

2). **Краевая задача.** Дополнительные условия заданы более чем в одной точке. Такие условия называются краевыми или граничными. Например:

$x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, ………, $x(t_n)=x_n$,

Задачи, предназначенные для решения в данной части, описываются ОДУ 1-2 порядка.

Получение обыкновенного дифференциального уравнения

На первом этапе работы необходимо вывести обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ- если оно в задаче не дано), решая данную физическую или математическую задачу.

Например, рассмотрим задачу:

Тело брошено вертикально вниз со скоростью 2 м/с с высоты Н= 20м. Сила сопротивления движению пропорционально скорости, коэффициент сопротивления *k=0.2. Построить зависимость координаты тела от времени y(t). Через какое время тело упадет на землю?*

В задачах из раздела Механика для составления ОДУ используется 2й закон Ньютона. Направим ось y вверх. На брошенное тело действует сила тяжести (направлена вниз) и сила сопротивления (направлена противоположно скорости). Уравнение движения

$m \cdot \vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{сопр}; \quad или \quad m \cdot a = -m \cdot g - k \cdot v$

Так как ускорение является второй производной координаты, скорость – первой производной координаты, можно записать

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Начальные условия y(0)=H, v(0)=2.

Если бы нужно было найти зависимость скорости от времени, то, учитывая, что ускорение является первой производной от скорости по времени, уравнение выглядело бы так

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot v$$

Начальные условия: v(0)=2.

Схема Эйлера для ОДУ 1-го порядка

Исходное уравнение F(t, x, x')=0

переписывается в виде: x'=f(t,x) , с начальным условием: $x(t_0)=x_0$.

Численное решение получается последовательным вычислением значений независимой переменной и функции по схеме:

$t_{i+1}=t_i+h$,

$x_{i+1}=x_i+h \cdot f(x_i, t_i)$ для i=1, 2, 3, …

Система ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \phi(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений являются функции y(x) и z(x). Так как в систему входят 2 уравнения первого порядка, нужно задать 2 начальных условия: $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$.

Схема Эйлера: $x_{i+1}=x_i+h$

$y_{i+1}=y_i+h \cdot \phi(x_i,y_i,z_i)$

$z_{i+1}=z_i+h \cdot \psi(x_i,y_i,z_i)$

Схема Эйлера для ОДУ 2-го порядка

Уравнения высших порядков сводят к системе ОДУ 1 порядка путем замены переменных. Для решения уравнения второго порядка,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=z_0$,

чтобы понизить порядок вводят новую переменную z=y'(x).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

Получают систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f(x, y, z). \\ \dfrac{dy}{dx} = z(x). \end{cases}$$

Схема Эйлера для численного решения такой системы записана в предыдущем параграфе.

Схема метода Рунге-Кутта для ОДУ 1-го порядка

Численное решение в этом методе получается последовательным вычислением значений независимой переменной и функции по схеме:

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h \times k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h \times k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + h \times k_3)$$

В этой записи f(t,x) – правая часть уравнения x’= f(t,x).

Например, для ОДУ $x' = 2(t^2 + x)$ схема метода Рунге-Кутта будет следующей

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = 2(t_i^2 + x_i)$$

$$k_2 = 2\left[(t_i + h/2)^2 + x_i + \frac{h \cdot k_1}{2}\right]$$

$$k_3 = 2\left[(t_i + h/2)^2 + x_i + \frac{h \cdot k_2}{2}\right]$$

$$k_4 = 2((t_i + h)^2 + x_i + h \cdot k_3)$$

Численное решение ОДУ методами Эйлера и Рунге-Кутта

1. На первом этапе работы необходимо вывести ОДУ, если оно не дано в задаче, записать начальные условия. Даже если Вы сумели решить задачу самостоятельно, обратитесь к преподавателю, чтобы проверить ход решения и правильность вывода.
2. Приведите имеющееся уравнение к виду: **старшая_производная=функция**.

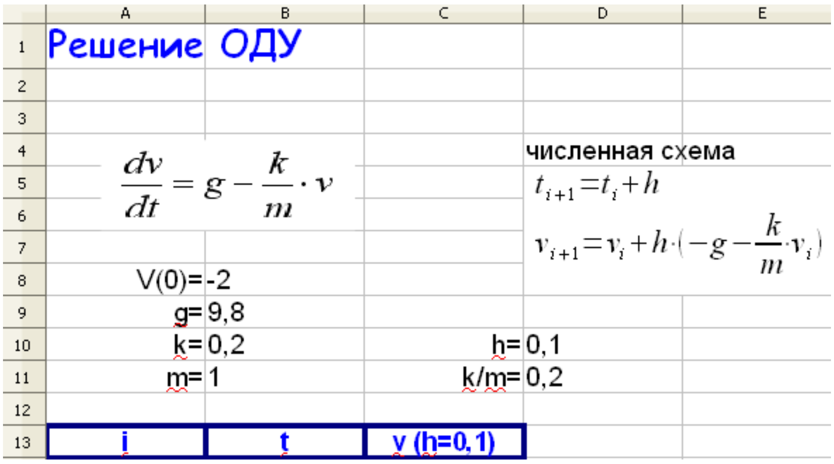
Например:

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - t^2 = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2(x + t^2)$$

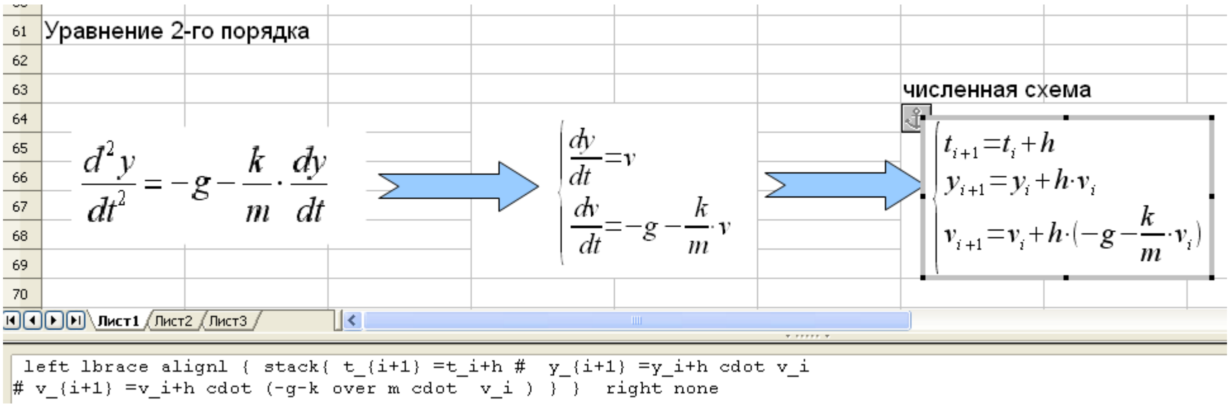
$$y \cdot y'' + \frac{y'}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{y'}{x \cdot y}$$

3. Если уравнение 2-го порядка, сведите его к системе уравнений 1-го порядка, как показано в предыдущем параграфе.
4. В документе Calc запишите уравнение, начальные условия, численную схему, выберите шаг интегрирования ОДУ и подготовьте заголовок таблицы-решения.

Для ОДУ 1-го порядка:



Для ОДУ 2-го порядка (таблица показана ниже):



5. Рассчитайте таблицу решений согласно численной схеме:

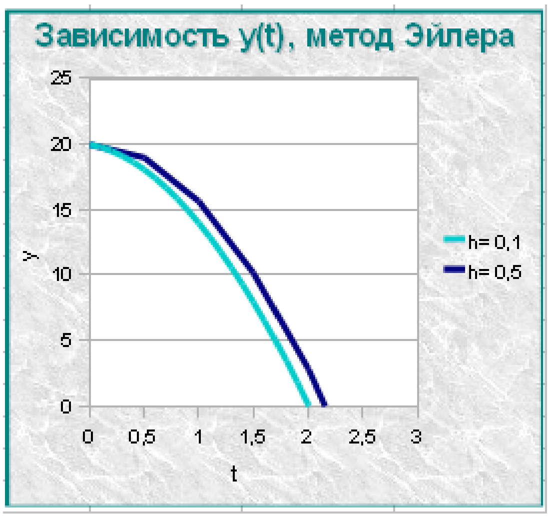
Для ОДУ 1-го порядка:

9	g=	9,8		
10	k=	0,2	h=	0,1
11	m=	1	k/m=	0,2
12				
13	i	t	y (h=0,1)	
14	0	0	-2	
15	1	0,1	-2,94	
16	2	0,2	-3,86	
17	3	0,3	-4,76	
18	4	0,4	-5,65	
19	5	0,5	=C18+$D$10*(-$B$9-$D$11*C18)	

Для ОДУ 2-го порядка:

Y(0=)	20		
V(0)=	-2		
g=	9,8		
k=	0,2	h=	0,1
m=	1	k/m=	0,2
i	t	y (h=0,1)	v
0	0	20	-2
1	0,1	19,8	-2,94
2	0,2	19,51	-3,86
3	0,3	=C80+$D$74*D80	
4	0,4	18,64	-5,65
5	0,5	18,08	-6,52
6	0,6	17,43	=D83+$D$74*(-$B$73-$D$75*D83)

6. Постройте график функции-решения. Рассчитайте таблицу функции-решения для другого шага (для h=0.5) и постройте на том же графике (см.рис. ниже). Сделайте вывод о зависимости решения от шага. Какое из найденных решений точнее?



7. Проанализируйте график (таблицу) функции-решения. Найдите ответы на все поставленные в задаче вопросы. Например, по полученному графику зависимости y(t) видно, что тело упадет на землю через 2 секунды.
8. Решите уравнение Вашей задачи (1-2 порядка) методом Рунге-Кутта (с шагом h=0.5, в отличии от решения, приведенного на рисунке). В этом методе последующие значения k рассчитываются через только что вычисленные предыдущие (k2 - через k1 в той же строке, k3 - через k2 в той же строке, k4 - через k3 в той же строке).

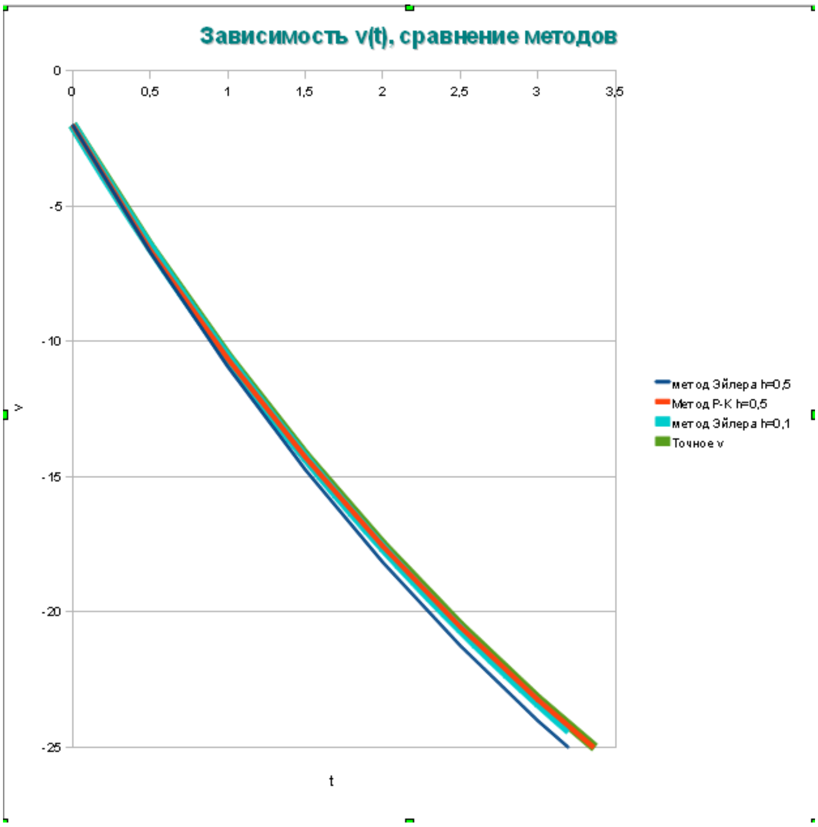
Решение ОДУ методом Рунге-Кутта

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot v$$

V(0)=	-2			
g=	9,8			
k=	0,2	h=	0,1	
m=	1	k/m=	0,2	Метод Р-К

i	ti	k1	k2	k3	k4	vi Р-К
0	0					-2
1	0,1	-9,4000	-9,3060	-9,3069	-9,2139	-2,9307
2	0,2	-9,2139	-9,1217	-9,1227	-9,0314	-3,8429
3	0,3	-9,0314	-8,9411	=-$B$103-$D$105*(G110+$D$104*D111/2)		
4	0,4	-8,8526	-8,7641	-8,7649	-8,6773	-5,6135
5	0,5	-8,6773	-8,5905	-8,5914	-8,5055	-6,4726
6	0,6	-8,5055	-8,4204	-8,4213	-8,3370	-7,3147
7	0,7	-8,3371	-8,2537	-8,2545	-8,1720	-8,1402
8	0,8	-8,1720	-8,0902	-8,0911	-8,0101	-8,9492

9. Сравните решения, полученные методом Эйлера (h=0.5 b h=0.1) и методом Рунге-Кутта для шага h=0.5, построив график (на рис. ниже для сравнения представлено точное решение – его находить и строить не надо)



Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- Записано ОДУ с необходимым числом начальных условий
- Записана численная схема Эйлера для решения данного ОДУ

- Проведено численное решение ОДУ методом Эйлера для 2 значений шага
- Проведено численное решение ОДУ методом Рунге-Кутта для шага h=0.5
- Найдены ответы на вопросы задачи

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 1.

1. Что такое ОДУ? Как определяется его порядок? Что является его решением?
2. Чем отличаются общее и частное решение ОДУ? Что такое задача Коши? Краевая задача?
3. Как записать схему Эйлера для ОДУ 1-2 порядка. Записать схему Эйлера для ОДУ 1-2 порядка, данного преподавателем. (см. примеры на стр.88 электронного варианта пособия «Численные методы в физических задачах»)
4. Записать схему метода Рунге-Кутта для ОДУ 1 порядка, данного преподавателем.

Часть 2 (дополнительная). Сравнение решений ОДУ разными методами.

1. Решите одно из уравнений (по выбору преподавателя) аналитически. Найдите частное решение, задав нужное число дополнительных условий.

а) $\dfrac{dy}{dx} = y(y+2)$ г) $(1+e^x)y' = e^x$

б) $(x^2+4)y' = 2xy$ д) $y' = \sqrt[3]{y}\cdot x^2$

в) $y' = -x\cdot e^y$ е) $y' + (2y+1)ctg(x) = 0$

2. Решите уравнение численно, используя метод Эйлера.
3. Решите уравнение численно, используя метод Рунге-Кутта.
4.Составьте таблицу решения уравнения по методу Милна или Адамса (по выбору преподавателя). Обратите внимание, что коррекция должна выполняться столько раз, сколько нужно для поддержания точности (см. рис. ниже). Выводите числа с шестью знаками после запятой, относительная точность вычислений 10^{-5} %.

Обратите внимание, методы Милна и Адамса не являются самостартующими, поэтому нужное количество значений функции найдите с помощью метода Рунге-Кутта.

При расчетах удобнее завести столбец значений искомой функции –конечный результат коррекции и ссылаться в расчетах именно на него. В противном случае, при расчетах придется при подстановке значений функции ссылаться то на 2-ю, то на 3-ю итерацию коррекции.

Метод Милна	h=	0,1												
		Прогноз				Коррекция								
i	x(n+1))	f(n-2)	f(n-1)	f(n)	y(n+1)	f1(n+1)	y1(n+1)	dy	f2(n+1)	y2(n+1)	dy	f3(n+1)	y3(n+1)	dy
1	0									1,000000				
2	0,1									1,003690				
3	0,2									1,014902				
4	0,3									1,034058				
5	0,4	0,074042	0,150892	0,233427	1,061873	0,324647	1,061877	0,000004	0,324646	1,061877	0,000000			
6	0,5	0,150892	0,233427	0,324646	1,099377	0,427681	1,099381	0,000005	0,427679	1,099381	0,000000			
7	0,6	0,233427	0,324646	0,427679	1,147911	0,545753	1,147914	0,000003	0,545751	1,147914	0,000000			
8	0,7	0,324646	0,427679	0,545751	1,209140	0,682039	1,209139	0,000001	0,682040	1,209139	0,000000			
9	0,8	0,427679	0,545751	0,682040	1,285035	0,839430	1,285025	0,000010	0,839439	1,285026	0,000000			
10	0,9	0,545751	0,682040	0,839439	1,377826	1,020161	1,377804	0,000023	1,020184	1,377805	0,000001	1,020183	1,377805	0,000000
11	1	0,682040	0,839439	1,020183	1,489915	1,225357	1,489877	0,000038	1,225404	1,489878	0,000002	1,225402	1,489878	0,000000
12	1,1	0,839439	1,020183	1,225402	1,623738	1,454582	1,623684	0,000055	1,454662	1,623686	0,000003	1,454658	1,623686	0,000000
13	1,2	1,020183	1,225402	1,454658	1,781596	1,705524	1,781530	0,000066	1,705637	1,781534	0,000004	1,705631	1,781534	0,000000
14	1,3	1,225402	1,454658	1,705631	1,965459	1,973981	1,965392	0,000067	1,974114	1,965396	0,000004	1,974105	1,965396	0,000000
15	1,4	1,454658	1,705631	1,974106	2,176798	2,254260	2,176744	0,000053	2,254380	2,176748	0,000004	2,254371	2,176748	0,000000
16	1,5	1,705631	1,974106	2,254372	2,416473	2,539937	2,416447	0,000026	2,540002	2,416449	0,000002	2,539997	2,416449	0,000000
17	1,6	1,974106	2,254372	2,539997	2,684711	2,824805	2,684721	0,000009	2,824779	2,684720	0,000001	2,824782	2,684720	0,000000
18	1,7	2,254372	2,539997	2,824782	2,981171	3,103730	2,981211	0,000041	3,103604	2,981207	0,000004	3,103617	2,981208	0,000000
19	1,8	2,539997	2,824782	3,103616	3,305074	3,373193	3,305134	0,000060	3,372990	3,305128	0,000007	3,373013	3,305128	0,000001
20	1,9	2,824782	3,103616	3,373010	3,655378	3,631416	3,655443	0,000065	3,631182	3,655435	0,000008	3,631210	3,655436	0,000001
21	2	3,103616	3,373010	3,631207	4,030938	3,878143	4,030994	0,000056	3,877927	4,030986	0,000007	3,877955	4,030987	0,000001

5. Скопируйте в отдельную таблицу решения, полученное различными методами, и найдите отклонение. Зависит ли это отклонение от шага h?

Сравнение вычисленных значений				
x	y	м.Эйлера	м.Р-К	м.Милна
0,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,100000	1,003690	1,000000	1,003690	1,003690
0,200000	1,014902	1,007432	1,014902	1,014902
0,300000	1,034058	1,022634	1,034058	1,034058
0,400000	1,061877	1,046245	1,061877	1,061877
0,500000	1,099381	1,079221	1,099381	1,099381
0,600000	1,147914	1,122860	1,147914	1,147914
0,700000	1,209139	1,178819	1,209140	1,209139
0,800000	1,285026	1,249123	1,285028	1,285026

Отклонения				
x	y	м.Эйлера	м.Р-К	м.Милна
0,000000	1,000000	0,0000%	0,0000%	0,0000%
0,100000	1,003690	0,3677%	0,0000%	0,0000%
0,200000	1,014902	0,7361%	0,0000%	0,0000%
0,300000	1,034058	1,1048%	0,0000%	0,0000%
0,400000	1,061877	1,4721%	0,0000%	0,0000%
0,500000	1,099381	1,8338%	0,0000%	0,0000%
0,600000	1,147914	2,1826%	0,0000%	0,0000%
0,700000	1,209139	2,5075%	0,0001%	0,0000%
0,800000	1,285026	2,7940%	0,0001%	0,0000%

6.Подберите такое значение шага вычислений, чтобы численная схема стала неустойчивой.

Контрольные вопросы к части 2.

1. Записать схему метода Милна для ОДУ 1 порядка, данного преподавателем.
2. Записать схему метода Адамса для ОДУ 1 порядка, данного преподавателем.
3. Чем методы Милна и Адамса принципиально отличаются от методов Эйлера и Рунге-Кутта?
4. Одинаковы ли погрешности разных методов и чем вызваны эти погрешности?

Справка

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + C_1,$$

$$y = C\left(x^2 + 4\right).$$

$$y = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

$$y = \ln\left(e^x + 1\right) + C.$$

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$