

Задача 7. Оптимизация. Линейное программирование.

Часть 1 (обязательная). Решение задачи линейного программирования.

Постановка задачи

Основательно изучите теорию, изложенную в документе Оптимизация.doc.

На первом этапе необходимо проанализировать текст вашей задачи и записать целевую функцию и систему ограничений.

Задача: «Кондитерская фабрика выпускает три вида конфет: «Звёздные», «Ну-ка, отними», «Зайчик» по цене 190, 160 и 150 рублей за кг соответственно. Для производства этих конфет используется три вида сырья. Расход и запасы сырья в условных единицах для производства 1 кг конфет отражены в таблице.

Наименование	Нормы расхода			Запас сырья
	Звездные	Ну-ка, отними	Зайчик	
Какао	18	15	12	360
Сахар	6	4	8	192
Наполнитель	5	3	3	180

Найти, какое количество конфет каждого вида нужно произвести, чтобы получить максимальную прибыль»

Обозначим x_i ($i=1..3$) - количество произведенных конфет каждого вида. Прибыль можно подсчитать по формуле (целевая функция) $Z=190x_1+160x_2+150x_3$.

Система ограничений:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо найти оптимальную совокупность x_1, x_2, x_3 , при которых Z – максимальна.

Нахождение параметров задачи

Оформите условия задачи в документе:

1. Запишите тему «Оптимизация. Линейное программирование».
2. Внесите в документ полный текст задачи.
3. С помощью редактора формул впишите целевую функцию и систему ограничений.
4. Оформите таблицу, в которой присутствуют неизвестные (искомые параметры) и всё необходимое для расчета целевой функции.

Наименование конфет	Количество	Цена	Стоимость
Звёздные	0	190	=C36*D36
Ну-ка, отними	0	160	0
Зайчик	0	150	0
Всего (целевая функция)			=SUM(E36:E38)

5. Оформите таблицу, в которой будут рассчитываться ограничения задачи

34						
35	Наименование конфет	Количество	Цена	Стоимость		
36	Звёздные	0	190	0		
37	Ну-ка, отними	0	180	0		
38	Зайчик	0	150	0		
39	Всего (целевая функция)			0		
40						
41						
42	Наименование сырья	Нормы расхода			Запас сырья	Расход
43		Звёздные	Ну-ка, отними	Зайчик		
44	Какао	18	15	12	360	0
45	Сахар	6	4	8	192	0
46	Наполнитель	5	3	3	180	=C46*C36+D46*C37+E46*C38

6. Вызовите решатель с помощью меню Сервис/Поиск решения. Заполните поля его меню:

Целевая ячейка – ячейка, в которой рассчитывается значение целевой функции;

Путем изменения ячеек – ячейки с искомыми параметрами задачи;

Ограничительные условия – служат для оформления ограничений задачи, в рассматриваемой задаче ограничения связаны с тем, что запас каждого вида сырья должен быть больше или равен его расходу. Кроме того, искомые параметры должны быть неотрицательными.

Если по условию задачи параметры могут быть только целыми числами, нажмите кнопку Параметры на панели решателя (внизу, под ограничительными условиями) и выберите соответствующий пункт (опцию).

	A	B	C	D	E	F	G
35		Наименование конфет	Количество	Цена	Стоимость		
36		Звёздные	0	190	0		
37		Ну-ка, отними	0	180	0		
38		Зайчик	0	150	0		
39		Всего (целевая функция)			0		
40							
41							
42		Наименование сырья	Нормы расхода			Запас сырья	Расход
43			Звёздные	Ну-ка, отними	Зайчик		
44		Какао	18	15	12	360	0
45		Сахар	6	4	8	192	0
46		Наполнитель	5	3	3	180	0
47							

Решатель

Целевая ячейка: \$E\$39

Результат: Максимум Минимум Значение

Путем изменения ячеек: \$C\$36:\$C\$38

Ограничительные условия

Ссылка на ячейку	Операция	Значение
\$G\$44	<=	\$F\$44
\$G\$45	<=	\$F\$45
\$G\$46	<=	\$F\$46
\$C\$36:\$C\$38	>=	3

Параметры... Справка Закрыть Решить

7. Нажмите кнопку Решить. В ячейках появятся значения параметров и целевой функции.

8. Сравните значения целевой функции при полученных и других значениях параметров:

Сравнение значений целевой функции при разных значениях параметров						
x1 (Звездные)	x2 (Ну-ка...)	x3 (Зайчик)	Z(x1,x2,x3)	Остатки какао	Остатки Сахар	Остатки Наполнитель
0	8	20	4280	0	0	96
1	7	18	4010	21	14	100
1	4	21	3880	30	2	100
12	9	0	3720	9	84	93

Для контроля в каждой строке проверяйте ограничения, если выбранные параметры приводят к нарушению ограничений – измените их. В данной задаче рассчитаны остатки сырья. Выбирая разные значения параметров, убеждаемся, что параметры, найденные Решателем – наилучшие.

Геометрическая интерпретация основной задачи ЛП

Проиллюстрируем задачу ЛП геометрически. Согласно теории (см. файл Оптимизация.doc), ограничения представляют собой полупространства, которые образуют фигуру в многомерном пространстве и все возможные комбинации параметров представляют собой точки внутри этой фигуры. Однако, легко нарисовать эту фигуру можно только для задач с двумя параметрами. Если параметров больше (как в разбираемой задаче), нужно считать свободно изменяющимися только два (любые из них), а остальные – зафиксировать, например, взять равными найденным решателем значениям.

В данной задаче будем рассматривать изменения параметров x_2 и x_3 , а x_1 возьмем равным нулю.

Далее необходимо построить ограничения в виде прямых, ограничивающих полуплоскости (в случае 2х параметров – это аналоги полупространств).

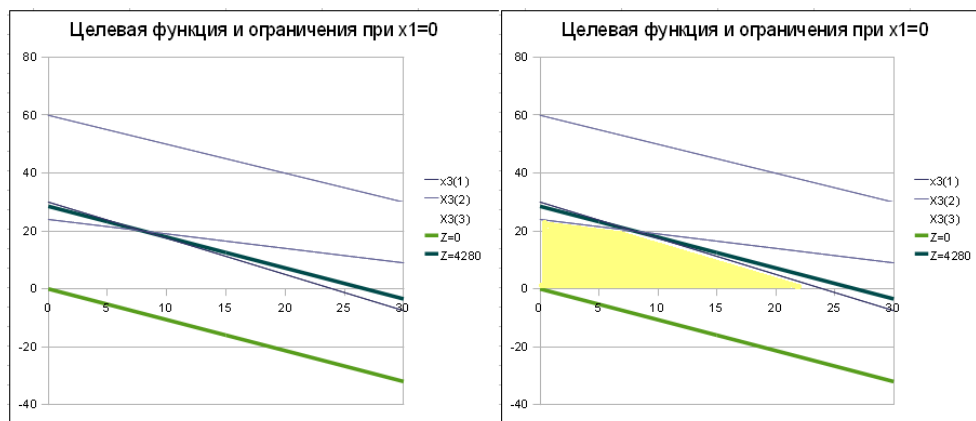
Чтобы рассчитать эти прямые, нужно поставить знак равенства и выразить один параметр через другой:

$$\begin{cases} x_3 = (360 - 18x_1 - 15x_2) / 12 \\ x_3 = (92 - 6x_1 + 4x_2) / 8 \\ x_3 = (180 - 5x_1 + 3x_2) / 3 \\ x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

После этого нужно рассчитать зависимость x_3 (x_2) (учтем, что $x_1=0$ и что для построения прямых достаточно двух точек):

x2	x3(1)	x3(2)	x3(3)	Z=0	Z=4280
0	30	24	60	0	28,53
30	-7,5	9	30	-32	-3,47

Затем нужно аналогично рассчитать зависимость $Z=0$ и $Z=\max$ ($Z=\min$) и построить графики:



Представленные рисунки одинаковы, кроме того, что на правом желтой заливкой выделена область допустимых значений x_3 и x_2 . На рисунке видно, что прямая $Z=190x_1+160x_2+150x_3$ при разных значениях Z передвигается параллельно самой себе и при $Z=\max$ касается дальней вершины области допустимых значений x_3 и x_2 .

Требования к защите

При защите задачи студент должен продемонстрировать документ – электронную таблицу Open Office.org, в котором:

- имеется полный текст задачи;
- выписаны целевая функция и система ограничений решаемой задачи;
- имеется таблица, в которой присутствуют искомые параметры и расчет целевой функции;
- имеется таблица, в которой рассчитаны ограничения задачи;
- имеется таблица, в которой рассчитаны значения целевой функции при полученного и 3-5 других наборов значений параметров;
- имеется геометрическая интерпретация задачи.

При защите задачи студент должен:

- Знать взаимосвязь имеющихся таблиц с условием задачи;
- Находить оптимальное решение с помощью встроенного Решателя;
- Уметь показать, что найденное решение является оптимальным;
- Понимать смысл геометрической интерпретации задачи, показывать область допустимых значений параметров, взаимное расположение этой области и целевой функции.

Для зачета по теоретической части студент должен ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы к части 1.

1. Постановка задачи линейного программирования.
2. Вывод целевой функции и системы ограничений для конкретной задачи (задачи оптимального использования ресурсов, задача о смесях, транспортная задача).
3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования с двумя параметрами.
4. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.