

Кемеровский Государственный Университет

Кафедра экспериментальной физики

**Движение в поле тяжести Земли
тела, брошенного горизонтально**

*работа по курсу
«Вычислительная физика»*

Выполнил
Студент гр. Ф-043
Иванов И.И

Кемерово 2007

Оглавление

Введение.....	2
1. Литературный обзор.....	2
1.1. Развитие взглядов на движение тел в поле силы тяжести.....	2
2.2. Падение тел в воздухе.....	3
2.3. Движение тела, брошенного горизонтально.....	4
2. Моделирование движения тела, брошенного горизонтально.....	6
2.1. Работа с программным обеспечением в процессе моделирования.....	6
2.2. Движение тела, брошенного горизонтально без учета сопротивления воздуха.....	7
2.3. Движение тела, брошенного горизонтально с учетом сопротивления воздуха.....	8
Заключение.....	9
Литература.....	10

Введение

В данной работе изучается движение тела, брошенного горизонтально, и движущегося под действием силы тяжести с учётом и без учёта силы сопротивления воздуха.

Формулировка задачи: «Построить траекторию движения тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью v_0 без учета и с учетом сопротивления воздуха. Что это за кривая? Зависит ли время падения на землю от сопротивления воздуха?».

В первой части данной работы приведен литературный обзор изучаемого вопроса. На основе изучения 7 литературных источников (список литературы - конце текста работы) дан обзор литературы по вопросу движения тела под действием силы тяжести, рассмотрены законы движения, выведены уравнения движения тела, брошенного горизонтально с учетом силы тяжести и силы сопротивления воздуха.

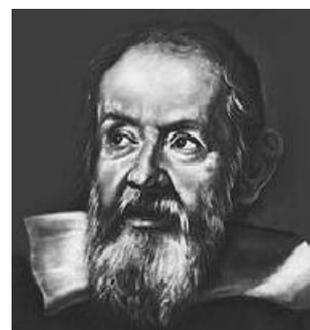
Во второй части работы представлены результаты моделирования движения тела, брошенного горизонтально, на основе численного решения уравнений движения с помощью метода Эйлера. Проведено сравнение траекторий движения без учета и с учетом сопротивления воздуха, изучена зависимость времени падения от начальной скорости и силы сопротивления.

1. Литературный обзор

1.1. Развитие взглядов на движение тел в поле силы тяжести.

Одним из наиболее распространенных примеров равноускоренного движения является движение тела, свободно падающего по вертикали на землю. Тот факт, что все падающие тела ускоряется одинаково, не является очевидным. Опыт показывает, что более тяжелые тела падают быстрее, чем легкие и до эпохи Галилея считалось, что скорость падения пропорциональна тяжести тела.

Галилей применил свой новый научный метод абстрагирования и упрощения, который состоит в попытке представить себе, что произойдет в идеализированных (упрощенных) ситуациях. Для случая свободного падения Галилей постулировал, что при отсутствии воздуха или другой среды с сопротивлением все тела будут падать с одинаковым постоянным ускорением. Он по



казал, что, согласно этому постулату, расстояние, проходимое телом, падающим из состояния покоя, пропорционально квадрату времени [4,6].

Галилей утверждал, что любые предметы (как тяжелые, так и легкие) падают с одинаковым ускорением, по крайней мере, при отсутствии воздуха. Правда, здравый смысл может подсказать, что древние были ближе к истине. Действительно, держать лист бумаги горизонтально в одной руке, а более тяжелое тело, скажем бейсбольный мяч, в другой и высвободить их одновременно, то более тяжелое тело достигнет земли первым. Но, если повторить этот эксперимент, но на этот раз смять бумагу в маленький комочек, то оба тела достигнут пола почти одновременно.

Галилей был уверен, что воздух действует на очень легкие тела с большой площадью поверхности как особый вид трения. В камере, из которой удален воздух, даже легкие тела, такие, как перо или удерживаемый горизонтально лист бумаги, будут падать с тем же ускорением, что и тяжелые тела. Во времена Галилея подобная демонстрация в вакууме была, разумеется, невозможна, что делает его заслуги еще более выдающимися.

Следовательно, неодновременность падения - следствие влияния среды, а при отсутствии его тяжелые и легкие тела должны падать за одно и то же время, т.е. с одинаковым ускорением.

Во многих случаях сопротивление воздуха оказывает незначительное влияние, и большей частью им можно пренебрегать. Однако, если расстояние, проходимое падающим телом, очень велико, сопротивление воздуха будет оказывать заметное влияние даже на тяжелые предметы.

2.2. Падение тел в воздухе.

При падении в воздухе тело движется под действием двух сил: постоянной силы земного притяжения mg , направленной вертикально вниз, и силы сопротивления воздуха [1] :

$$\vec{F}_c = -k * \vec{V} \quad (1)$$

(знак “-“ показывает, что сила сопротивления воздуха направлена противоположно скорости). При больших скоростях и в более вязких средах сила сопротивления может быть пропорциональна второй и, даже, третьей степени скорости [2,3]. Равнодействующая силы тяжести и силы сопротивления воздуха равна их векторной сумме. Уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{V} \quad (2) \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \cdot g - k \cdot V \quad (3)$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dV_y}{dt} = -g - \frac{k * V_y}{m} \end{cases} \quad (4)$$

Пока скорость падающего тела еще мала, невелика и сила сопротивления воздуха: но по мере того, как возрастает скорость падения, эта сила быстро растет. При некоторой скорости F_c становится равным mg и дальше тело падает равномерно. Скорость такого падения называют предельной скоростью падения [7].

При постоянной скорости V_y : $\frac{dV_y}{dt} = 0$ и $-g - \frac{k * V_{ypr}}{m} = 0$.

Откуда предельное значение скорости: $V_{ypr} = -\frac{m * g}{k}$

Предельная скорость тем больше, чем сильнее разрежен воздух. Поэтому тело, падающее с очень большой высоты, может в разреженных слоях атмосферы приобрести скорость, большую предельной скорости для нижних (плотных) слоев. Войдя в нижние слои атмосферы, тело снизит свою скорость до значения предельной скорости для нижних слоев.

2.3. Движение тела, брошенного горизонтально.

Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально и движущегося под действием одной только силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Например, представим себе, что шару, лежащему на столе, сообщают толчок и он докатывается до края стола и начинает свободно падать, имея начальную скорость V_0 , направленную горизонтально. Спроектируем движение шара на вертикальную ось и на горизонтальную ось, направленную вдоль начальной скорости тела. Вдоль горизонтальной оси тело движется без ускорения со скоростью V_0 ; движение вдоль вертикальной оси—это свободное падение с ускорением g без начальной скорости под действием силы тяжести.

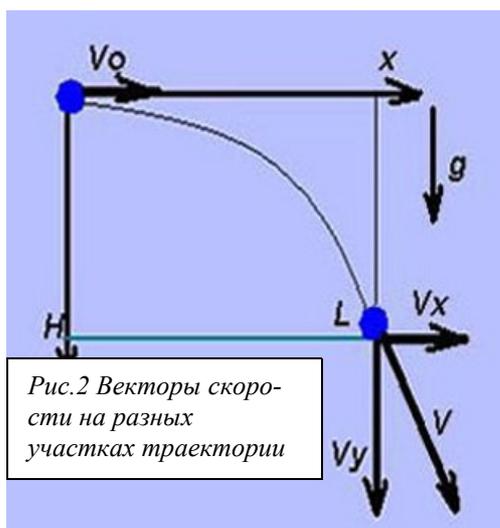


Рис.2 Векторы скорости на разных участках траектории

Горизонтальная составляющая скорости V_x , остается постоянной и равной V_0 . Вертикальная составляющая V_y , растет пропорционально времени: $V_y = -g * t$.

Результирующий вектор скорости будет наклонен вниз (см. рис.), и его наклон будет расти с течением времени [2]. Вектор результирующей скорости легко найти по правилу параллелограмма.

Найдем теперь траекторию движения тела, брошенного горизонтально. Горизонтальная проекция тела, двигаясь с постоянной скоростью V_0 , пройдет к

моменту t путь, равный: $S = V_0 * t$. Путь, пройденный по вертикали, будет равен

$H = \frac{g * t^2}{2}$. Зная S и H можем построить точку, в которой будет находиться тело в момент t. Величины S и H можно считать абсциссой и ординатой тела в системе координат с началом в точке, откуда шарик начал падать, с осью абсцисс, расположенной горизонтально, и с осью ординат, направленной вертикально вниз. Чтобы найти уравнение траектории тела, выразим из $S=V_0*t$ промежуток времени и подставим в $H = \frac{g * t^2}{2}$. Получим:

$$H = \frac{g * S^2}{2V_0^2}.$$

Ординаты точек траектории оказываются пропорциональными квадратам абсцисс, то есть кривая является параболой. Таким образом, свободно падающее тело, начальная скорость которого горизонтальна, движется по параболе.

Зная начальную скорость V_0 и высоту падения H, можно найти расстояние по горизонтали до места падения. Действительно, получаем формулу:

$$S = V_0 * \frac{\sqrt{2 * H}}{\sqrt{g}}. \quad (5)$$

Полученные формулы можно было бы применить к падению авиационной бомбы, сброшенной с горизонтально летящего самолета, если бы можно было пренебрегать сопротивлением воздуха.

В момент сбрасывания бомба обладает той же скоростью, что и самолет: поэтому она начинает падать с горизонтальной начальной скоростью, равной скорости самолета. Если бы сопротивления воздуха не было, бомба падала бы по параболе и в течение всего времени падения находилась бы точно под самолетом (если бы последний сохранял свой курс и скорость). В частности, падение бомбы на землю происходило бы как раз под той точкой, где в момент падения находится самолет. Однако пренебрежение сопротивлением воздуха, допустимое для медленно летящего тела, приведет для быстро движущейся бомбы к большим ошибкам: вследствие сопротивления воздуха горизонтальная составляющая скорости бомбы сильно уменьшается, а вертикальная составляющая растет гораздо медленнее, чем при падении в пустоте. Вследствие сопротивления воздуха сброшенная с самолета бомба сразу начинает отставать от самолета и падает далеко позади него. Это уменьшает точность бомбометания. Для этого нужно учесть, что в векторной форме 2-ой закон Ньютона имеет вид:

$$m * \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m * \vec{g} - k * \vec{V} \quad (6)$$

При движении в плоскости XOY в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k * V_x}{m} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k * V_y}{m} \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dY}{dt} = V_y \\ \frac{dV_x}{dt} = -\frac{k * V_x}{m} \\ \frac{dV_y}{dt} = -\frac{k * V_y}{m} - g \end{cases} \quad (8)$$

При падении тела с высоты H, брошенного с начальной скоростью V_0 .

Начальные условия:

$$x(0)=0, y(0)=H, V_x(0)=V_0, V_y=0.$$

Для выше указанной системы уравнений разностная схема метода Эйлера запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + \Delta t \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t * V_{xi} \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta t * V_{yi} \\ V_{yi+1} &= V_{yi} + \Delta t * \left(-\frac{k * V_{yi}}{m} - g\right) \\ V_{xi+1} &= V_{xi} + \Delta t * \left(-\frac{k * V_{xi}}{m}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

2. Моделирование движения тела, брошенного горизонтально

2.1. Работа с программным обеспечением в процессе моделирования.

Учитывая вышеизложенную теорию, разработана таблица в Calc для демонстрации законов движения тела, падающего с начальной горизонтальной скоростью. В таблице приведены значения координат x, y и составляющие скорости V_x и V_y от времени t в зависимости от начальных условий задачи – значений начальных высоты и скорости, массы тела, коэффициента сопротивления воздуха.

Lister - [c:\Tanja\DATA9.DAT]					
File Edit Options Help					
t	x	y	Ux	Uy	H=10.00 m= 1.00 Ux= 2.00 k= 0.70
0.00	0.00	10.00	2.00	0.00	
0.01	0.02	10.00	1.99	-0.10	
0.02	0.04	10.00	1.97	-0.20	
0.03	0.06	10.00	1.96	-0.29	
0.04	0.08	9.99	1.94	-0.39	
0.05	0.10	9.99	1.93	-0.48	
0.06	0.12	9.99	1.92	-0.58	
0.07	0.14	9.98	1.90	-0.67	
0.08	0.16	9.97	1.89	-0.77	

Рис 3. Фрагмент таблицы с решением системы ОДУ.

Решение, полученное для каждого набора начальных данных (H , V_x , m , k), записывалось в отдельную страницу.

Затем по полученным данным были в табличном редакторе Calc построены графики. Для ответов на вопросы задачи были построены зависимости $y(t)$ и траектории движения тела для коэффициента сопротивления воздуха $k=0, 0.3, 0.5$ кг/с, масс тела $m=1$ и 10 кг. Так как в данной работе не ставится задачи исследования зависимости траектории тела и времени падения от начальной скорости и высоты, значения этих величин были постоянными $H=10$ м, $V_x=2$ м/с.

Для простоты построения графиков, все полученные данные были скопированы в один файл (см. файл «Падение с гориз скоростью.ods») и размещены на двух листах. Первый лист книги содержит данные о движении тел разной массы без учета сопротивления воздуха, второй – с различными коэффициентами сопротивления воздуха.

Далее на каждом листе были построены диаграммы $y(t)$ и траектории движения тела. Полученные зависимости приведены ниже.

2.2. Движение тела, брошенного горизонтально без учета сопротивления воздуха.

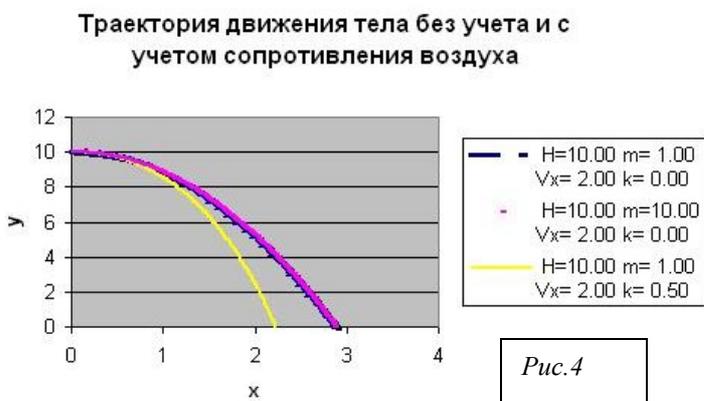
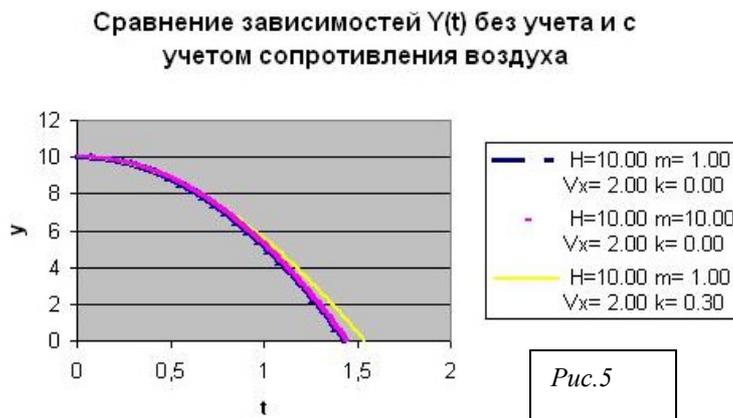


Рис.4

Моделирование движения тела, брошенного горизонтально, без учета сопротивления воздуха, было проведено для $H=10$ м, $V_x=2$ м/с. $k=0$ и двух разных масс $m=1$ и 10 кг. Траектории движения тел (зависимость $y(x)$) изображены на рисунке слева. Из рисунка видно, что траектории движения тел

без учета сопротивления воздуха (синяя и малиновые линии) являются параболами и одинаковы для тел разной массы (графики налагаются друг на друга). Для сравнения, на гра-

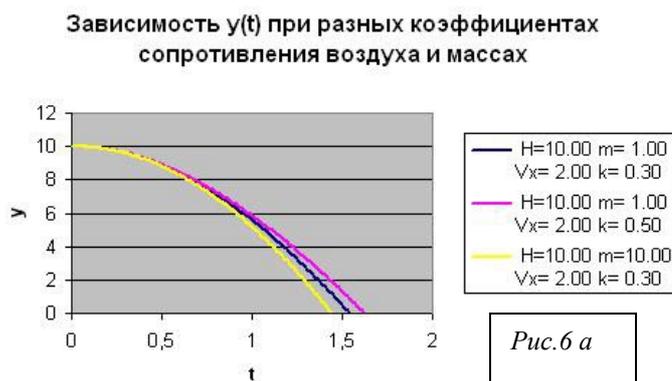
фике приведена траектория движения с учетом сопротивления воздуха. Видно, что при наличии сопротивления, форма линии отклоняется от параболы.



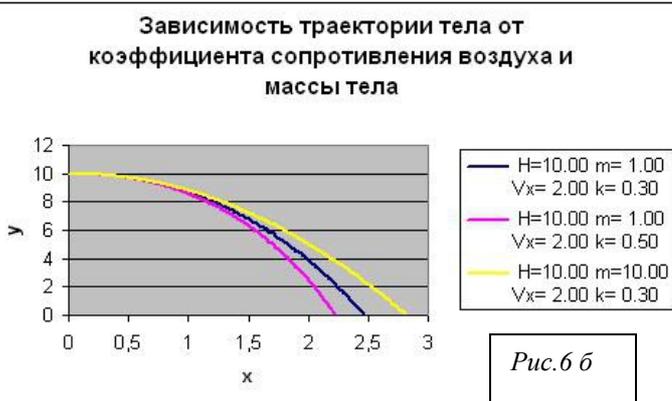
На следующем графике приведены зависимости вертикального положения тела от времени $y(t)$. Видно, что время падения (значение t при $y=0$) одинаково для тел разной массы (синяя и малиновые линии налагаются друг на друга), если сопротивление воздуха не учитывать. На графике также при-

ведена зависимость $y(t)$ при наличии сопротивления воздуха. Очевидно, время падения при этом больше.

2.3. Движение тела, брошенного горизонтально с учетом сопротивления воздуха.



Моделирование движения тела, брошенного горизонтально, с учетом сопротивления воздуха было проведено для $H=10$ м, $V_x=2$ м/с., коэффициентов сопротивления воздуха $k=0.3$ и 0.5 кг/с, и двух разных масс $m=1$ и 10 кг.



Анализ зависимостей $y(t)$ при различных коэффициентах сопротивления k , позволяет сделать качественный вывод о том, что чем больше k , тем больше время падения. Это связано с торможением тела (уменьшением скорости), двигающегося в вязкой среде. Кроме того, сравнение $y(t)$ при $k=0.3$ кг/с для тел разной массы, показывает,

что тяжелое тело в воздухе действительно должно падать быстрее. Количественные значения времени падения, максимального значения координаты x для различных параметров, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Время падения и максимальная координата x тела при различных массах m и коэффициентах сопротивления воздуха k .

	k=0		k=0.3 кг/с		k=0.5 кг/с
	m=1 кг	m=10 кг	m=1 кг	m=10 кг	m=1 кг
Время падения, сек	1.43	1.43	1.54	1.44	1.62
$X_{\max, м}$	2.86	2.86	2.47	2.82	2.22

Анализ данных таблицы о координатах x в момент падения и траекторий движения тел (изображены на рисунке бб) показывает, что воздух тормозит продвижение тела и вдоль горизонтальной оси. Причем, чем тяжелее тело, тем большее расстояние от начала падения оно пролетает (при одинаковом коэффициенте сопротивления воздуха).

Заключение.

В данной работе проведено моделирование движения тела, брошенного горизонтально, с учётом и без учёта сопротивления среды. Изучалась форма траектории движения тела и зависимость времени падения от параметров задачи.

Был проведен поиск литературы по данному вопросу, составлена краткая пояснительная записка. Уравнение движения было получено из 2 закона Ньютона, с учетом действия силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений проведено численно, методом Эйлера. Обработка полученных данных проведена с помощью редактора электронных таблиц Calc.

В результате анализа результатов моделирования, получены следующие выводы:

- При описании движения тела с начальной горизонтальной скоростью, траектория имеет вид параболы и одинакова для тел разной массы. Тела разной массы при этом, падают на землю одновременно.
- При движении тела с начальной горизонтальной скоростью в плотной среде, оказывающей заметное сопротивление, тело движется медленнее, время падения увеличивается пропорционально коэффициенту сопротивления воздуха.
- Расстояние, проходимое телом вдоль горизонтальной оси обратно пропорционально коэффициенту сопротивления воздуха.
- В безвоздушном пространстве все тела падают одновременно.
- При одинаковом коэффициенте сопротивления воздуха, тяжелое тело падает на землю быстрее.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики, том I, Механика, колебания и волны, молекулярная физика. М.:Просвещение, 1980.
2. Движение тела, брошенного горизонтально. http://altnet.ru/~kitnet/www/proects/exec/Trunova_i_Shalaeva/site2.htm
3. Майер Р.В. Использование ПК В Учебном Эксперименте. <http://maier-rv.glazov.net/>
4. Бондаренко П.И. Опыты Галилея. http://www.zero-gravity.ru/article/svobodnoe_padenie/
5. Пирогова С.В., Ветохина Т.Н. Интегрированный урок: физика + информатика по теме: "Свободное падение. Решение физических задач в Паскале" .
http://festival.1september.ru/2005_2006/index.php?numb_artic=313373
6. Тарг С.М. Падение тела. <http://bse.sci-lib.com/article086198.html>