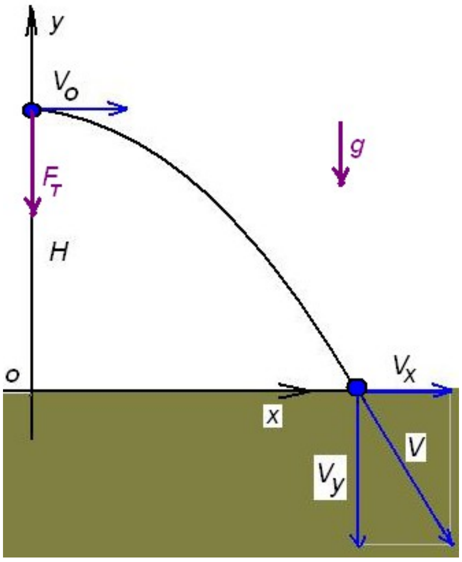
Моделирование физических явлений с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Описание движения в поле тяжести с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений

Физические явления, рассматриваемые в данном курсе, обычно описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).



Рассмотрим движение тела, брошенного с начальной горизонтальной скоростью V_0. Если не учитывать сопротивления воздуха, на такое тело действует только сила тяжести $F_т$=mg (см. рисунок). Уравнение движения тела получается из рассмотрения второго закона Ньютона:

$$m\bar{a} = m\bar{g} \quad \text{или} \quad m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\bar{g} \qquad (1)$$

Выберем систему координат, начало отсчета которой связано с землей, ось y направлена вверх. Тогда из (1) в проекциях на оси координат имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{и} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \qquad (2)$$

Начальные условия: при t=0:

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = V_0, \; y = H, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Для понижения порядка ОДУ вводим новые переменные и переходим к системе ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x \\ m\dfrac{dV_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = -mg \end{cases} \qquad (3)$$

Для численного интегрирования этой системы записываем схему Эйлера:

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + dt \\ x_{i+1} = x_i + dt \cdot V_{x,i} \\ V_{x,i+1} = V_{x,i} + dt \cdot 0 \\ y_{i+1} = y_i + dt \cdot V_{y,i} \\ V_{y,i+1} = V_{y,i} - dt \cdot g \end{cases} \quad (4)$$

Где dt - шаг по времени. Так как проекция ускорения на ось x равна нулю и скорость Vx не меняется, третье уравнение в системе (4) можно опустить. Учитывая начальные условия, получим

$$V_{x,0} = V_0,\ x_0 = 0,\quad V_{y,0} = 0,\ y_0 = H \quad . \quad (5)$$

Таким образом, подставляя в схему Эйлера (4) начальные условия (5), можно получить значение координат и скоростей в момент времени t_1, а с их помощью – значения в следующий момент времени и т.д.

Если учесть сопротивление воздуха, то во второй закон Ньютона (1) нужно включить еще одну силу

$$\vec{F}_{сопр} = -k\vec{V} \quad (6).$$

То есть,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = m\vec{g} - k\vec{V} \quad (7).$$

Этот случай описывается следующей системой ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x \\ m\dfrac{dV_x}{dt} = -kV_x \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = -mg - kV_y \end{cases} \quad (8)$$

Эта же система уравнений будет описывать и случай вертикального движения тела (только $V_x = V_0 = 0$ и два первых уравнения в системе (8) можно не рассматривать), и случай движения тела с начальной скоростью, направленной под углом к горизонту.

2. Движение в поле тяготения

Движение тела массой m_1 в поле тяготения массивного тела M происходит под действием гравитационной силы:

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_1 \cdot M}{r^3}\vec{r} \quad (9)$$

Где $\vec{r}$ - радиус-вектор между взаимодействующими телами (направлен к m_1), γ - гравитационная постоянная. Будем считать, что $M \gg m_1$. Тело массой M в таком случае является неподвижным центром тяготения. Тогда уравнение движения тела массой m_1:

$$m_1 \vec{a} = -\gamma \frac{m_1 M}{r^3} \vec{r} \qquad (10)$$

Совместим начало системы координат (0,0) с центром масс массивного тела M. Тогда уравнение (10) в проекциях будет иметь вид:

$$\begin{cases} m_1 a_x = -\gamma \dfrac{m_1 M}{r^3} \cdot x \\ m_1 a_y = -\gamma \dfrac{m_1 M}{r^3} \cdot y \end{cases} \qquad (11)$$

где x, y – координаты тела массой m_1, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

После замены переменных из (11) получается система ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x \\ m_1 \dfrac{dV_x}{dt} = -\gamma \dfrac{M m_1}{r^3} \cdot x \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y \\ m_1 \dfrac{dV_y}{dt} = -\gamma \dfrac{M m_1}{r^3} \cdot y \end{cases} \qquad (12)$$

Для численного интегрирования этой системы записываем схему Эйлера:

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + dt \\ x_{i+1} = x_i + dt \cdot V_{x,i} \\ V_{x,i+1} = V_{x,i} - \gamma \dfrac{M}{r^3} \cdot x_i dt \\ y_{i+1} = y_i + dt \cdot V_{y,i} \\ V_{y,i+1} = V_{y,i} - \gamma \dfrac{M}{r^3} \cdot y_i dt \\ r = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \end{cases} \qquad (13)$$

Удобно решать эту систему со следующими начальными условиями:

$x(0)=x_0$; $y(0)=y_0=0$; $V_x(0)= V_{x,0}=0$; $V_y(0)= V_{y,0}=-V$;

При этом тело массой m_1 будет двигаться против часовой стрелки вокруг массивного тела M по эллипсу, оси которого будут параллельны осям координат.

Планеты Солнечной системы, движения которых моделируются в задачах, движутся с периодами, измеряющимися годами, по орбитам, оси которых измеряются миллионами километров. Таким образом, моделирование «в реальном времени» представляется неразумным. Разумные времена и размеры орбит получаются, если взять γ=1, M=200, x(0)=30, V~5.

Если в задаче рассматривается движение вокруг тяготеющего центра M двух невзаимодействующих планет с массами m_1 и m_2, уравнение движения, подобное (10), записывается для каждого тела:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = -\gamma \dfrac{m_1 M}{r_1^3}\vec{r}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = -\gamma \dfrac{m_2 M}{r_2^3}\vec{r}_2 \end{cases} \qquad (14)$$

Если учитывать взаимодействие планет с массами m_1 и m_2 не только с Солнцем, но и друг с другом, необходимо учесть гравитационные силы взаимодействия между ними. На первую планету со стороны второй действует сила:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\cdot\vec{r}_{12} \qquad (15)$$

Вектор $\vec{r}_{12}$ имеет координаты и длину

$$\begin{aligned} &\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ &r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \qquad (16)$$

Проекции силы $\vec{F}_{12}$ на оси координат

$$\begin{aligned} &F_{12,x} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1) \\ &F_{12,y} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(y_2 - y_1) \end{aligned} \qquad (17)$$

На вторую планету со стороны первой действует сила $\vec{F}_{21}$. По третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad (18)$$

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^{\ 3}} \cdot \vec{r}_{12} \qquad (19)$$

3. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

В электрическом поле на частицу заряда e массой m действует электрическая сила $F_e = e \cdot \vec{E}$. Где E – напряженность электрического поля. В магнитном поле на частицу, движущуюся со скоростью v действует сила Лоренца $F_m = e[\vec{v} \cdot \vec{B}]$, где B- индукция магнитного поля. Таким образом, уравнение движения частицы в электрических и магнитных полях в векторной форме имеет вид:

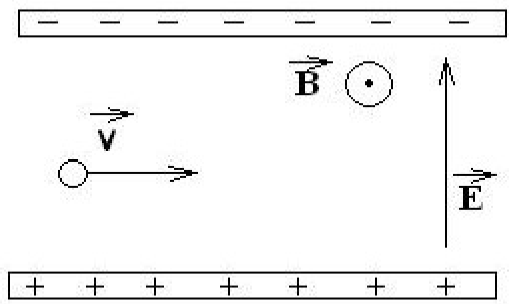
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e \cdot \vec{E} + e[\vec{v} \cdot \vec{B}]$$

В случае скрещенных однородных стационарных полей, если вектор E направлен по оси y, а вектор магнитной индукции B – по оси z, после замены переменных

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y},$$

(x,y –координаты заряженной частицы), получается система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{e}{m} v_y B \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{e}{m} E - \dfrac{e}{m} v_x B \end{cases}$$



Удобно решать эту систему ОДУ с начальными условиями $x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0; \quad v_y(0) = 0.$

Разностная схема для метода Эйлера:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot v_{xi}$$

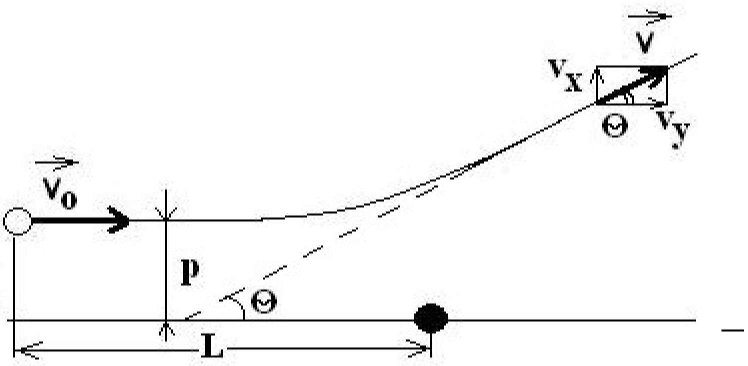
$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot v_{yi}$$

$$v_{x,i+1} = v_{xi} + \Delta t \cdot v_{yi} \cdot \frac{B}{m}$$

$$v_{y,i+1} = v_{yi} + \Delta t \cdot e(E - v_{xi} \cdot B) / m$$

Движение в поле рассеивающего центра.

Движение заряженной частицы в неоднородном поле продемонстрируем на примере рассеяния. Рассмотрим частицу с зарядом e1, массой m, которая налетает на заряженный центр с зарядом e2, массы M>>m (см. рис.). На рисунке v0 – начальная скорость частицы, p –прицельное расстояние, θ – угол рассеяния.



Сила взаимодействия между частицей и центром находится по закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot \vec{r}}{r^3},$$

где r – расстояние между центром и частицей. Если центр находится в точке с координатами (x0,y0), а (x,y) – координаты частицы, то проекции кулоновской силы

$$F_x = \frac{e_1 \cdot e_2 (x - x_0)}{r^3}, \qquad F_y = \frac{e_1 \cdot e_2 (y - y_0)}{r^3}, \text{ где } r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Удобно связать начало координат с рассеивающим центром, тогда x0=0,y0=0 и систему уравнений, описывающую движение заряженной частицы в данном случае можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{e_1 \cdot e_2 \cdot x}{m \cdot r^3} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{e_1 \cdot e_2 \cdot y}{m \cdot r^3} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

и решать с начальными условиями x= -L, y=p, vx=v, vy=0.

4. Механические колебания

Математический маятник (шарик на невесомой нити), выведенный из равновесия, может колебаться под действием возвращающей силы, величина которой, можно считать, пропорциональна отклонению от положения равновесия:

$$m \cdot a = -mg\frac{\sin(\alpha)}{L} \qquad (20)$$

Здесь α – угол отклонения маятника от положения устойчивого равновесия, L – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

Таким образом, колебания математического маятника без учета силы трения и при отсутствии вынуждающей силы описываются уравнением:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin(\alpha) = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (21)$$

Здесь ω_0 – собственная частота колебаний. Для решения уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin(\alpha) \qquad (22)$$

Обозначим скорость маятника p=dx/dt и сведем ОДУ второго порядка к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\alpha) \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = p \end{cases} \qquad (23)$$

которую можно решать с разными начальными условиями.

Для учета сопротивления воздуха в правую часть уравнения (20) добавляют слагаемое $F_{сопр} = -2b\dot{\alpha}$, при наличии периодической вынуждающей силы – слагаемое $F = F_0 \cos(\omega \cdot t)$, где ω – частота вынуждающей силы.